Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Emanoil Arghiriade

Sur l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire, dans les espaces de Hilbert

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 471–477.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_471_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 dicembre 1968

Presiede il Presidente Beniamino Segre

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sur l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire, dans les espaces de Hilbert.* Nota di Emanoil Arghiriade, presentata (*) dal Socio B. Segre.

Sunto. — L'inverso generalizzato di un operatore lineare fra due spazi di Hilbert è stato definito da Y. Y. Tseng sotto l'ipotesi che certi due insiemi di tali spazi risultino densi. La definizione viene qui estesa in modo da non dover supporre che questa condizione sia soddisfatta.

Notations. $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont des espaces de Hilbert; A, R des opérateurs linéaires: $A, \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ et $R, \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$. Pour un opérateur linéaire A, $\mathfrak{N}(A)$ est l'espace nul (le noyau) de A, $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathcal{H}_1$ est le domaine de definition, $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathcal{H}_2$ est le domaine des valeurs; pour $S \subset \mathcal{H}$, $S^{\perp}$ est le complément orthogonal de S en $\mathcal{H}$; $P_{\bar{S}}$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\bar{S}$; les sous espaces considérés dans $\mathcal{H}$, ne sont pas nécessairement fermés.

1. Yu. Ya. Tseng [1], [2], [3], [4] définit $R, \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ comme i.g. de $A, \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, en supposant entre autres que $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{D}(R)$ sont denses en $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ resp. $(\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathcal{H}_1, \overline{\mathfrak{D}(R)} = \mathcal{H}_2)$. Tous les résultats de Tseng sont donnés sans démonstration.

Les mêmes hypothèses pour l'existence de l'i.g. ont été adoptées par A. Ben Israel et A. Charnes [5]. L'i.g. a été étudiée dans des cas particuliers dans [6] et [7]. *Nous nous proposons de montrer que l'i.g. peut être définie sans faire aucune hypothèse sur* $\mathfrak{D}(A)$ *et* $\mathfrak{D}(R)$.

(*) Nella seduta del 19 novembre 1968.

D'autres définitions différentes de celle de Y. Y. Tseng, ont été données par M. R. Hestenes [8], [9], E. M. Landesman [10] pour les opérateurs denses et fermés et par J. Beutler [11] pour les opérateurs fermés.

Pour la définition de l'i.g. nous adoptons la définition de Y. Y. Tseng [1; pp. 431–432], [5; pp. 673–674] en laissant de coté les conditions relatives à la densité de $\mathfrak{D}(A)$ et $\mathfrak{D}(R)$.

DEFINITION SIMPLIFIÉE. L'operateur $R, \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ est une i.g. de $A, \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ si

$$(1) \qquad \mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{D}(R) \qquad \mathfrak{R}(R) \subseteq \mathfrak{D}(A)$$

$$(2) \qquad RAx = P^1 x \quad \text{pour } x \in \mathfrak{D}(A) \quad ; \quad ARy = P^2 y \quad \text{pour } y \in \mathfrak{D}(R)$$

P^1, P^2 étant les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sur $\overline{\mathfrak{R}(R)}$, $\overline{\mathfrak{R}(A)}$ resp. les domaines $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{D}(R)$ pouvant être denses ou non.

2. Soit $\mathfrak{L}$ un sous espace de $\mathcal{H}$, et le sous espace $S \subseteq \mathfrak{L}$. D'après Y. Y. Tseng, $\mathfrak{L}$ est dit *décomposable par rapport* S si pour chaque $x \in \mathfrak{L}$ on a:

$$(3) \qquad pr_{\bar{s}}\, x \in S.$$

Y. Y. Tseng a ennoncé (sans démonstration) que de (3) on déduit la somme orthogonale directe:

$$(4) \qquad \mathfrak{L} = S \oplus (\mathfrak{L} \cap S^{\perp})$$

est réciproquement. Montrons que de (3) on déduit (4). On a $\mathcal{H} = \bar{S} \oplus \bar{S}^{\perp} = \bar{S} \oplus S^{\perp}$, puisque $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$. Pour $x \in \mathfrak{L}$ on a donc $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \bar{S}$, $x_2 \in S^{\perp}$, et $x_2 \perp x_1$; donc $x_1 = pr_{\bar{s}}\, x$ et en vertu de (3), $x_1 \in S$. Alors $x_2 = x - x_1 \in \mathfrak{L}$ et comme on a aussi $x_2 \in S^{\perp} \Rightarrow x_2 \in \mathfrak{L} \cap S^{\perp}$. On a $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in S$, $x_2 \in \mathfrak{L} \cap S$; donc la formule (4). Réciproquement de (4) déduisons (3). Pour $x \in \mathfrak{L}$ nous avons de (4): $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in S$, $x_2 \in \mathfrak{L} \cap S^{\perp}$, donc $x_2 \perp x_1$. Mais on a aussi $x_1 \in \bar{S}$; donc $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \bar{S}$, $x_2 \perp x_1$ et par suite $x_1 = pr_{\bar{s}}\, x$ et comme $x_1 \in S$ il en résulte (3).

THÉORÈME DE YU. YA. TSENG. [1; p. 432], [5; pp. 673–674]. *Un opérateur linéaire* $A, \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $(\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathcal{H}^1)$ *admet une i.g. si et seulement si* $\mathfrak{D}(A)$ *est décomposable par rapport à* $\mathfrak{N}(A)$. *Dans ce cas* A *admet une i.g. maximale (brièvement i.g. max) unique* R_m, *pour laquelle* $\mathfrak{D}(R_m)$ *est maximum et pour laquelle*

$$(5) \qquad \mathfrak{D}(R_m) = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{R}(A)^{\perp} \quad ; \quad \mathfrak{N}(R_m) = \mathfrak{R}(A)^{\perp}$$

toute autre i.g. R *est une restriction de* R_m; R_m *est la seule i.g. possédant un espace nul fermé.*

Ce théorème a été donné sans démonstration par Y. Y. Tseng et avec le même ennoncé se trouve dans [5; p. 673]. Nous démontrerons ce théorème sans faire aucune hypothèse sur $\mathfrak{D}(A)$; en outre la dernière partie de ce théorème doit etre modifiée si $\mathfrak{D}(A)$ n'est pas dense ce qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

3. *Préliminaires.* Considérons la somme orthogonale directe

$$\mathfrak{L} = S \oplus S_1 \quad , \quad (S \perp S_1), \tag{6}$$

S , S_1 étant des sous espaces de $\mathcal{H}$. Soit $x \in S_1$; en vertu de (6) nous avons $x \perp S$, $x \in \overline{S}$ et comme $x \in \mathfrak{L}$, $\Rightarrow x \in \mathfrak{L} \cap S^\perp$ et donc $S_1 \subseteq \mathfrak{L} \cap S^\perp$. Réciproquement si $x \in \mathfrak{L} \cap S^\perp$, nous avons de (6), $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in S$, $x_2 \in S_1$. On considère le produit scalaire $(x , S) = 0 = (x_1 + x_2 , S) = (x_1 S)$ car $x_2 \in S_1$ et $S_1 \perp S$. De $(x_1 , S) = 0$ et comme $x_1 \in S \Rightarrow (x_1 , x_1) = 0$ et donc $x_1 = 0$; alors $x = x_1 + x_2 = x_2 \in S_1$. Donc si $x \in \mathfrak{L} \cap S^\perp \Rightarrow x \in S_1$ et $\mathfrak{L} \cap S^\perp \subseteq S_1$. De ces deux inclusions il en résulte

$$S_1 = \mathfrak{L} \cap S^\perp \qquad \text{et aussi} \quad S = \mathfrak{L} \cap S_1^\perp \tag{7}$$

et (6) devient

$$\mathfrak{L} = S \oplus (\mathfrak{L} \cap S^\perp) = S_1 + (\mathfrak{L} \cap S_1^\perp) \tag{8}$$

en tenant compte de (4) il en résulte que *le sous espace* $\mathfrak{L}$ *donné par* (6) *est décomposable tant par rapport à* S, *que par rapport à* S_1 *et sont valables les relations* (7) *et* (8).

4. *Supposons que* $A , \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *admet une i.g.* $R , \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, *donc sont vérifiées* (1) *et* (2), $\mathfrak{D}(A)$ *pouvant être dense ou non.* Soit $x \in \mathfrak{D}(A)$ et soit $x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}}\, x$. Nous avons $RAx = x'$ et comme $RAx = R(Ax)$ on déduit $x' \in \mathfrak{R}(R)$; d'autre part $P^1 x = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}}\, x = x_1$ et d'après (2), $x_1 = x' \in \mathfrak{R}(R)$. Donc pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ nous avons $pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}}\, x \in \mathfrak{R}(R)$ *donc* $\mathfrak{D}(A)$ *est décomposable par rapport à* $\mathfrak{R}(R)$ et d'après (4) nous avons en posant $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}^1$

$$\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{R}(R) \oplus (\mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^\perp) \quad , \quad (\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}(A)). \tag{9}$$

Soit $x \in \mathfrak{R}(R)$; nous avons évidemment $A[\mathfrak{R}(R)] \subseteq \mathfrak{R}(A)$. Soit $y \in \mathfrak{R}(A)$, nous avons de (2)

$$ARy = P^2 y = y \qquad \text{car} \quad y \in \mathfrak{R}(A) \qquad \text{et} \quad y = pr_{\overline{\mathfrak{R}(A)}}\, y. \tag{10}$$

Posons $Ry = y_0 \in \mathfrak{R}(R)$, et de (10)

$$ARy = A(Ry) = Ay_0 = y.$$

Tout vecteur $y \in \mathfrak{R}(A)$ est l'image d'un vecteur $y_0 \in \mathfrak{R}(R)$ car $y = Ay_0$, $y_0 \in \mathfrak{R}(R)$, donc A détermine une application de $\mathfrak{R}(R)$ SUR $\mathfrak{R}(A)$; montrons que c'est une application biunivoque. Supposons $Ax_1 = Ax_2$ avec $x_1 , x_2 \in \mathfrak{R}(R)$. Nous avons $RAx_1 = P^1 x_1 = x_1$ car $x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}}\, x_1$ et aussi $RAx_2 = x_2$; donc $x_1 = x_2$. *L'opérateur* A *determine une application biunivoque de* $\mathfrak{R}(R)$ *sur* $\mathfrak{R}(A)$ *et aussi* R *une application biunivoque de* $\mathfrak{R}(A)$ *sur* $\mathfrak{R}(R)$. Pour $x \in \mathfrak{D}^1$ nous avons de (9)

$$x \in \mathfrak{D}^1 \ , \ x = x_1 + x_2 \ , \ x_1 \in \mathfrak{R}(R) \ , \ x_2 \in \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^\perp \ , \ x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}}\, x. \tag{11}$$

Nous avons $RAx = RAx_1 + RAx_2$; de (2) on déduit $RAx = P^1 x = x_1$, $RAx_1 = P^1 x_1 = x_1$ car $pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}} x = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}} x_1 = x_1$. Alors $RAx = RAx_1$ et, $RAx_2 = 0$. Posons $Ax_2 = \xi \in \mathfrak{R}(A)$ et comme $R\xi = 0$ et comme R détermine une application biunivoque de $\mathfrak{R}(A)$ sur $\mathfrak{R}(R)$, de $R\xi = 0$, $\xi \in \mathfrak{R}(A) \Rightarrow \xi = 0$ et $Ax_2 = \xi = 0$. De la relation $Ax = Ax_1 + Ax_2$ il en résulte $Ax = Ax_1$.

Des relations (11) *il en résulte*

$$(12) \qquad Ax = Ax_1 \quad , \quad x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(R)}} x \quad , \quad Ax_2 = 0 .$$

Dans (9) supposons $x \in \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)$; de (11) on déduit $x_1 = 0$, $x_2 = x$ et de (12): $Ax = Ax_1 = 0$, donc $x \in \mathfrak{N}(A)$; il en résulte $\mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^{\perp} \subseteq \mathfrak{N}(A)$. Réciproquement soit $x \in \mathfrak{N}(A)$; d'après (11) nous avons $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{R}(R)$, $x_2 \in \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^{\perp}$ et de (12), comme $Ax = 0 \Rightarrow Ax_1 = 0$ avec $x_1 \in \mathfrak{R}(R)$; comme A détermine une application biunivoque de $\mathfrak{R}(R)$ sur $\mathfrak{R}(A) \Rightarrow x_1 = 0$ et $x = x_1 + x_2 = x_2 \in \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)$; il en résulte $\mathfrak{N}(A) \subseteq \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^{\perp}$.

De ces deux inclusions nous avons

$$(13) \qquad \mathfrak{N}(A) = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^{\perp}$$

et (9) devient

$$(14) \qquad \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{N}(A) \oplus \mathfrak{R}(R).$$

D'après (8) et (7) nous avons

$$(15) \qquad \boxed{\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{N}(A) \oplus (\mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{N}(A)^{\perp})} \, ,$$

$$\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(R)^{\perp} \quad , \quad \mathfrak{R}(R) = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{N}(A)^{\perp},$$

donc *si* A, $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, *admet une i.g., alors* $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}^1$ *est decomposable par rapport à* $\mathfrak{N}(A)$.

5. *Réciproquement supposons que pour* A, $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, *le domaine* $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}^1$ *est décomposable par rapport à* $\mathfrak{N}(A)$, *donc est vérifiée la relation* (15) *et démonstrons que* A *admet une i.g., le domaine* $\mathfrak{D}(A)$ *pouvant être dense ou non.* Ecrivons la relation (15) sous la forme

$$(16) \qquad \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{N}(A) \oplus \mathfrak{D}^0 \quad , \quad \mathfrak{D}^0 = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{N}(A)^{\perp} \quad , \quad \mathfrak{D}^0 \perp \mathfrak{N}(A).$$

On a évidemment $A\mathfrak{D}^0 \subseteq \mathfrak{R}(A)$. Soit $x \in \mathfrak{D}^1$; de (16) on deduit:

$$(17) \qquad x = x_1 + x_2 \quad , \quad x_1 \in \mathfrak{D}^0 \quad , \quad x_2 \in \mathfrak{N}(A) \quad , \quad x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{D}^0}} x \quad \text{car } \mathfrak{D}^0 \perp \mathfrak{N}(A).$$

Nous avons $Ax = Ax_1 + Ax_2 = Ax_1$ car $x_2 \in \mathfrak{N}(A)$, par conséquant tout vecteur $Ax \in \mathfrak{R}(A)$ est l'image d'un vecteur $x_1 \in \mathfrak{D}^0$, donc A determine une application de $\mathfrak{D}^0$ SUR $\mathfrak{R}(A)$; montrons que c'est une application biunivoque.

Supposons $Ax_1 = Ax_2$, avec $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}^0$. On déduit $A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathfrak{N}(A)$ et comme $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}^0$ et comme en vertu de (16); $\mathfrak{N}(A) \cap \mathfrak{D}^0 = 0$, il en résulte $x_1 = x_2$, donc A determine une application biunivoque de $\mathfrak{D}^0$ sur $\mathfrak{R}(A)$. *Soit* $\tilde{A}$ *la restriction de* A, *à* $\mathfrak{D}^0$; *l'opérateur* $\tilde{A}$ *applique d'une manière biunivoque* $\mathfrak{D}^0 \longleftrightarrow \mathfrak{R}(A)$; il est donc inversable et soit

$$\tilde{R} = \tilde{A}^{-1},$$

R *applique d'une manière biunivoque* $\mathfrak{R}(A) \longleftrightarrow \mathfrak{D}^0$; on a

$$\mathfrak{D}(\tilde{R}) = \mathfrak{R}(\tilde{A}) = \mathfrak{R}(A) \quad ; \quad \mathfrak{R}(\tilde{R}) = \mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}^0.$$

Soit S un sous-espace quelconque de $\mathfrak{R}(A)^{\perp}$; considérons les sommes directes orthogonales $(S \subset \mathfrak{R}(A)^{\perp})$

$$\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{R}(A) \oplus S \quad , \quad \mathfrak{D}^2_{\max} = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{R}(A)^{\perp}. \tag{18}$$

Pour $y \in \mathfrak{D}^2$ nous avons de (18)

$$y = y_1 + y_2 \quad , \quad y_1 \in \mathfrak{R}(A) \quad , \quad y_2 \in S \quad ; \quad y_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(A)}}\, y \quad \text{car } \mathfrak{R}(A) \perp S. \tag{19}$$

Nous pouvons définir dans $\mathfrak{D}^2$ un opérateur R.

$$Ry = R(y_1 + y_2) = Ry_1 = \tilde{R}y_1 = \tilde{A}^{-1} y_1, \qquad (y \in \mathfrak{D}^2) \tag{20}$$

R est évidemment linéaire et

$$\mathfrak{D}(R) = \mathfrak{D}^2 \qquad \mathfrak{R}(R) = \mathfrak{D}^0 \tag{21}$$

$\tilde{R}$ *est la restriction de* R *à* $\mathfrak{R}(A)$ et $\tilde{R}$ est évidemment un opérateur linéaire. Soit $y \in S$; de (19) nous avons $y_1 = 0, y_2 = y$, et de (20); $Ry = Ry_1 = 0$, donc $y \in \mathfrak{N}(R)$ par conséquant $S \subseteq \mathfrak{N}(R)$. Réciproquement soit $y \in \mathfrak{N}(R)$; de (20) et (19) nous avons $Ry = 0 = Ry_1 = \tilde{R}y_1$ car $y_1 \in \mathfrak{R}(A)$. Comme $\tilde{R}$ établit une correspondance biunivoque entre $\mathfrak{R}(A)$ et $\mathfrak{D}^0$, on déduit $y_1 = 0$ et $y = y_1 + y_2 = y_2 \in S$. Donc $\mathfrak{N}(R) \subseteq S$. De ces deux inclusions il en résulte

$$S = \mathfrak{N}(R). \tag{22}$$

De la première relation (18), de (21), et de (21) et la première (16):

$$\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}(R) \quad ; \quad \mathfrak{R}(R) = \mathfrak{D}^0 \subseteq \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}(A),$$

donc les relations (1) sont vérifiées.

Considérons les relations

$$\tilde{A}x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad \tilde{A}^{-1} y_1 = x_1, \tag{23}$$

si dans la première $x_1 \in \mathfrak{D}^0 \Rightarrow y_1 \in \mathfrak{R}(A)$ et réciproquement pour la seconde relation; la première relation (23) entraine la seconde et réciproquement.

En tenant compte de (17), (23), (21) et aussi de (19), (22) il en résulte pour $x \in \mathfrak{D}^1$, $y \in \mathfrak{D}^2$.

$$\mathrm{RA}x = \mathrm{RA}(x_1 + x_2) = \mathrm{RA}x_1 = \mathrm{R}\tilde{\mathrm{A}}x_1 = \mathrm{R}y_1 = \tilde{\tilde{\mathrm{R}}}y_1 = \tilde{\mathrm{A}}^{-1}y_1 = x_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(\mathrm{R})}}\, x$$

$$\mathrm{AR}y = \mathrm{AR}(y_1 + y_2) = \mathrm{AR}y_1 = \mathrm{A}\tilde{\tilde{\mathrm{R}}}y_1 = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}}^{-1}y_1 = \mathrm{A}x_1 = \tilde{\mathrm{A}}x_1 = y_1 = pr_{\overline{\mathfrak{R}(\mathrm{A})}}\, y.$$

Donc les rélations (2) sont vérifiées *et* R *est une i.g. de* A.

Dans les formules (18) prenons $\mathrm{S} = \mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp}$; on peut définir d'une manière absolument analogue un opérateur R_m qui est une i.g. maximale; de (20) on déduit sans difficulté que R est une restriction de R_m.

THÉORÈME DE Y. Y. TSENG SIMPLIFIÉ. *Un opérateur linéaire* A, $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, *le domaine* $\mathfrak{D}(\mathrm{A})$ *pouvant être dense ou non, admet une i.g. si et seulement si* $\mathfrak{D}(\mathrm{A})$ *est décomposable par rapport à* $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$, *c'est à dire si et seulement si* (15) *est verifiée; il existe une i.g. max* R *vérifiant* (5) *et des i.g. non. max.* R *qui sont des restrictions de* R_m. Les applications du théorème simplifié seront exposées dans un travail prochain; nous mentionnons seulement la suivante: *un opérateur fermé à domaine dense ou non, admet toujours des i.g.*

6. REMARQUE 1. *Pour l'i.g. maximale* $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_m) = \mathfrak{D}^2_{\max}$ *donné par* (18) *est dense*; en effet si pour $v \in \mathcal{H}_2$ on a $v \perp \mathfrak{D}^2_{\max}$, on a en particulier de (18) $v \perp \mathfrak{R}(\mathrm{A}) \Rightarrow v \in \mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp}$; on a aussi en particulier de (18), $v \perp \mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp} \Rightarrow v \in (\mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp})^{\perp}$, donc $v \in \mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp} \cap (\mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp})^{\perp} = 0$, donc $v = 0$ et $\mathfrak{D}^2_{\max}$ est dense.

REMARQUE 2. *Pour une i.g. non. max* $\mathfrak{D}(\mathrm{R}) = \mathfrak{D}^2$ *donné par* (18) *n'est pas en général dense*. Soit R_1 un opérateur linéaire quelconque $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ pour lequel $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_1) = \Delta$ n'est pas dense; soit $\Sigma = \mathfrak{N}(\mathrm{R}_1)^{\perp} \cap \Delta$. On considère la somme orthogonale directe $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{N}(\mathrm{R}_1) \oplus \Sigma \subseteq \Delta$. $\mathfrak{D}^2$ n'est pas dense, car dans le cas contraire, pour $v \in \mathcal{H}_2$ si $v \perp \Delta \Rightarrow v \perp \mathfrak{D}^2$ et alors $v = 0$, et Δ serait aussi dense. Soit R la restriction de R_1 à $\mathfrak{D}^2$. De la relation $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{N}(\mathrm{R}) \oplus \Sigma$ il en résulte que $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}(\mathrm{R})$, est décomposable par rapport à $\mathfrak{N}(\mathrm{R})$ et alors R admet une i.g. A; mais alors R est aussi une i.g. de A et il existe donc des i.g. non. max. R pour lesquelles $\mathfrak{D}(\mathrm{R})$ n'est pas dense.

REMARQUE 3. Il résulte de (18) et de (22) que *pour tout sous espace* $\mathrm{S} \subseteq \mathfrak{R}(\mathrm{A})^{\perp}$ *il existe une i.g.* R *pour laquelle* $\mathfrak{N}(\mathrm{R}) = \mathrm{S}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] YU. YA. TSENG, *L'inverse generalisée d'un opérateur linéaire non borné, entre deux espaces unitaires*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », NS, 67, 431–4 (1949) (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », *11*, 45 (1950).

[2] YU. YA. TSENG, *Propriétés et classification des inverses generalisées des opérateurs fermés*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », NS, 67, 607–10 (1949) (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », *11*, 115 (1950).

[3] YU. YA. TSENG, *Sur les solutions des éq. opératrices fonc. entre les espaces unitaires*, « CR. Acad. Sci. Paris », *228*, 640–1 (1949).

[4] YU. YA. TSENG, *Solutions virtuelles et inv. généralisée*, « Uspehi Mat. Nauk SSSR », NS, *11*, 213–5 (1956) (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », *18*, 749 (1957).

[5] A BEN ISRAEL and A. CHARNES, *Contributions to the theory of generalised inverses*, « J. Soc. Industr. Appl. Math. », vol. II, nr. 3, 667–99 (1963).

[6] C. A. DESSER and B. H. WHALEN, *A note of pseudoinverse*, « J. Soc. Industr. Appl. Math. », *11*, nr. 2, 442–47 (1963).

[7] S. KUREPA, *Generalised inverses of an operator with closed range*, « Glasnik Mat. », tom 3, *23*, nr. 2, 207–14, Zagreb Yougoslavie 1968.

[8] M. R. HESTENES, *Relative self adjoint operators in Hilbert space*, « Pacific J. Math. », *11* (1961).

[9] M. R. HESTENES, *A ternary alg*, « Archive for Rational Mec. and Anal. II », 1962, pp. 138–197.

[10] E. M. LANDESMAN, *Hilbert Space Meth.* « Pacif. J. Mat. », *21* (1967), pp. 113–131.

[11] F. J. BEUTLER, *The operator Theory of the Pseudoinverse*, « J. of Mat. Analysis Appl. », *10*, 451–93 (1965).