Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Bocchio

Su alcuni teoremi integrali per la curvatura geodetica e la curvatura media nel caso di campi di curve superficiali e di campi di superfici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 317–322.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_317_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Geodesia. — *Su alcuni teoremi integrali per la curvatura geodetica e la curvatura media nel caso di campi di curve superficiali e di campi di superfici.* Nota di FRANCO BOCCHIO, presentata (*) dal Corrisp. A. MARUSSI.

SUMMARY. — Some differential and integral properties of the geodesic curvature of fields of surface curves and of the mean curvature of fields of surfaces are studied. The same properties are studied when the fields undergo a conformal transformation.

1. La presente Nota si ricollega ad un gruppo di lavori, in parte pubblicati sugli Atti di questa Accademia, nei quali si studiano proprietà differenziali ed integrali delle rappresentazioni tra superfici partendo non già, come di consueto, dalla corrispondenza puntuale fra queste, ma ponendosi piuttosto dal punto di vista della teoria dei campi; caratterizzando cioè le rappresentazioni mediante il tensore o, nel caso particolare delle rappresentazioni conformi, lo scalare, che ne fornisce il modulo di deformazione lineare. In ciò si è fatto largo uso del calcolo tensoriale, che rappresenta lo strumento naturale per una trattazione in questo indirizzo, [12], [13], [14], [15].

In questa Nota si studiano anzitutto alcune proprietà differenziali ed integrali che hanno riguardo a campi di curve tracciati su superfici, ed a campi di superfici, proprietà che permettono di giungere rapidamente e sinteticamente a risultati di un certo interesse, per esaminare poi la traduzione di questi risultati quando sugli enti considerati si operi una trasformazione conforme.

2. Si consideri, su una porzione regolare Σ di superficie il cui contorno L sia una curva chiusa pure regolare, una famiglia (c), a un parametro, di curve regolari tali che per ogni punto di Σ passi una e una sola curva della famiglia; in tal caso (c) costituisce quel che si dice un *campo di curve* su Σ [7]. Si indichino con $\bar{n}_c$ e $\bar{t}_c$ i versori normale e tangente alle curve di (c); il verso di $\bar{n}_c$ sia tale da rendere positiva la rotazione che porta $\bar{t}_c$ su $\bar{n}_c$. Indicati in forma controvariante con ν^i e λ^i i versori $\bar{n}_c$ e $\bar{t}_c$, per le formule di Frenet potrà scriversi

$$\frac{\delta \nu^i}{\delta s} = -\gamma_c \lambda^i, \tag{2.1}$$

ove γ_c indica la curvatura geodetica delle curve della famiglia. Nel seguito, per semplicità, γ_c verrà chiamata curvatura geodetica di (c), e analoga terminologia si adotterà per gli altri enti relativi a curve di (c) cui si farà

(*) Nella seduta del 19 novembre 1968.

riferimento. Alla (2.1) può darsi la forma

$$\nu^i/_k \lambda^k = -\gamma_c \lambda^i. \tag{2.2}$$

Essendo $\bar{n}_c$ un vettore unitario, è $\nu_i \nu^i = 1$, da cui

$$\nu^i/_k \nu_i = \nu_{i/k} \nu^i = 0. \tag{2.3}$$

Ciò significa che

$$\nu^i/_k = \alpha_k \lambda^i, \tag{2.4}$$

con α_k indeterminato. Dalle (2.2), (2.4) risulta

$$\lambda^k \alpha_k = -\gamma_c. \tag{2.5}$$

Contraendo $\nu^i/_k$ si ricava quindi

$$\nu^i/_i = \operatorname{div} \bar{n}_c = -\gamma_c, \tag{2.6}$$

relazione già trovata da McConnell [1] ed Eisenhart [3].

3. Essendo $\bar{n}_c$ per le ipotesi fatte un campo vettoriale su Σ, ha senso considerare l'integrale

$$\iint_\Sigma \operatorname{div} \bar{n}_c \, d\sigma. \tag{3.1}$$

Si potrà pertanto scrivere, in virtù delle formule di Green sopra una superficie [2]

$$\iint_\Sigma \operatorname{div} \bar{n}_c \, d\sigma = -\int_L \bar{n}_c \times \bar{n}_L \, ds, \tag{3.2}$$

essendo $\bar{n}_L$ il versore normale al contorno L e diretto verso l'interno di Σ. Dalla (2.6) segue

$$\iint_\Sigma \operatorname{div} \bar{n}_c \, d\sigma = -\iint_\Sigma \gamma_c \, d\sigma \tag{3.3}$$

e quindi, per la (3.2)

$$\iint_\Sigma \gamma_c \, d\sigma = \int_L \bar{n}_c \times \bar{n}_L \, ds. \tag{3.4}$$

La (3.4) può esprimersi dicendo che *la curvatura geodetica integra di un campo* (c) *di curve su una superficie eguaglia il flusso entrante del versore normale a* (c) *attraverso il contorno di* Σ.

4. Si consideri un campo (c) di curve e il campo (c_0) delle loro traiettorie ortogonali; il contorno di Σ sia un quadrilatero costruito con segmenti di curve di (c) e di (c_0). Essendo il flusso specifico di $\bar{n}_c$ o nullo o uguale a uno

lungo il contorno L, sarà

$$\iint_{\Sigma} \gamma_c \, d\sigma = \Delta l \tag{4.1}$$

dalla quale si può concludere che *la differenza di lunghezza tra i lati opposti del quadrilatero è data dalla curvatura geodetica integra di* (c) *su di esso.*

5. Se (c) è costituito da curve chiuse e come contorno L si sceglie una curva di (c), la (3.4) si può scrivere, essendo in tal caso $\bar{n}_{\mathrm{L}} = \bar{n}_c$ sul contorno,

$$\iint_{\Sigma} \gamma_c \, d\sigma = \int_{\mathrm{L}} ds = l \tag{5.1}$$

ove l indica la lunghezza del contorno L. La (5.1) può esprimersi dicendo che la *curvatura geodetica integra di un campo di curve chiuse uguaglia, su di una superficie che abbia per contorno una sua curva, la lunghezza del contorno.*

6. Se (c) è una famiglia di geodetiche sarà $\gamma_c = 0$ e quindi

$$\int_{\mathrm{L}} \bar{n}_c \times \bar{n}_{\mathrm{L}} \, ds = 0, \tag{6.1}$$

ossia: *è nullo il flusso del versore normale a* (c) *attraverso il contorno* L *di* Σ. Se ora si considera il sistema doppio ortogonale formato da una famiglia di geodetiche e dalle loro traiettorie ortogonali e se come contorno L di Σ si prende un quadrilatero costruito con archi di queste curve, dalle (4.1), (4.2) si ottiene che

$$\Delta l = \iint_{\Sigma} \gamma_c \, d\sigma = 0, \tag{6.2}$$

ritrovando, in maniera sintetica il ben noto risultato che *archi di geodetica compresi tra le loro traiettorie ortogonali hanno uguale lunghezza* [5].

7. Se si indica con $\nu^{i'}$ il trasformato di ν^i in una rappresentazione conforme di Σ su Σ', sussiste la relazione

$$\nu^i = e^{\mu} \, \nu^{i'}, \tag{7.1}$$

in cui μ indica il logaritmo naturale del modulo di deformazione lineare. Dalla (7.1) si ottiene

$$\nu^i{}_{/i} = e^{\mu} \, \nu^{i'}{}_{/i} + e^{\mu} \, \mu_{/i} \, \nu^{i'} \tag{7.2}$$

alla quale, per la (2.6), può darsi la forma,

$$\gamma'_c = \bar{e}^{\mu} (\gamma_c - \mu_{/i} \nu^i) \tag{7.3}$$

che esprime, in forma tensoriale, il ben noto toerema di Schols [6], che viene così ritrovato per via sintetica.

8. Si consideri, in una regione R tridimensionale racchiusa da una superficie chiusa regolare S, una famiglia (σ) di superfici tali che per ogni punto di R passi una e una sola superficie; in tal caso (σ) costituisce un *campo di superfici* in R, [8]; si ammette inoltre che (σ) sia composto di superfici regolari e che, se $F(x, y, z, t) = 0$ è l'equazione di (σ) la $F(x, y, z, t)$ abbia derivate continue rispetto a x, y, z, t e sia $F'_t \neq 0$. Sotto queste ipotesi il versore $\bar{n}$ normale alle superfici di (σ), che per brevità diremo normale a (σ), costituisce in R un campo vettoriale e saranno definite anche le linee di flusso di $\bar{n}$ [9], [10]. Indicata con M la curvatura media di (σ) sussiste, come è noto, la relazione

$$M = -\operatorname{div} \bar{n}. \tag{8.1}$$

9. Quando si applichi alla (8.1) il teorema della divergenza si ricava

$$\iiint_V M \, dV = \iint_S \bar{n}_S \times \bar{n} \, dS \tag{9.1}$$

ove V indica il volume racchiuso dalla superficie S ed $\bar{n}_S$ il versore normale ad essa rivolto verso l'interno. La (9.1) può esprimersi dicendo che *la curvatura media integra di un campo* (σ) *di superfici entro il volume* V *racchiuso da una superficie* S, *uguaglia il flusso entrante del versore normale a* (σ) *attraverso* S.

10. Si consideri ora, su di una generica superficie di (σ) una linea chiusa regolare C; le linee di flusso di $\bar{n}$ che passano per i punti di C individuano una superficie tubolare che si dice tubo di flusso. Come volume V si scelga quello racchiuso da una sezione di tubo di flusso e dalle superfici da esso staccate su due generiche superfici σ_1, σ_2 di (σ). Essendo nullo il flusso di $\bar{n}$ attraverso la superficie laterale del tubo, la (9.1) si riduce alla

$$\iiint_V M \, dV = \Delta S \tag{10.1}$$

ove il secondo membro rappresenta la differenza tra le aree delle superfici staccate dal tubo su σ_1 e σ_2, e dunque: *entro una sezione di tubo di flusso compresa tra due superfici di* (σ) *la curvatura media integra di* (σ) *è fornita dalla differenza tra le aree delle basi del tubo di flusso.*

11. Se (σ) è un campo di superfici chiuse ed S appartiene a (σ) si avrà $\bar{n}_S = \bar{n}$ e quindi

$$(11.1) \qquad \iiint_V \mathrm{M}\, d\mathrm{V} = \iint_V d\mathrm{S} = \mathrm{A}$$

cioè *la curvatura media di un campo* (σ) *di superfici chiuse uguaglia, entro il volume racchiuso da una superficie* S *di* (σ) *l'area* A *di* S.

12. Se (σ) è un campo di superfici minime si avrà

$$(12.1) \qquad \iint_S \bar{n}_S \times \bar{n}\, d\mathrm{S} = 0$$

ossia *è nullo il flusso entrante del versore normale a un campo di superfici minime attraverso una superficie chiusa* S. Se pure non nella forma espressa qui la (12.1) è già stata data dal Brand [8]. Pertanto, se si considera un tubo di flusso per un campo (σ) di superfici minime, dalla (10.1) si ottiene

$$(12.2) \qquad \Delta \mathrm{S} = 0$$

ossia: *un tubo di flusso stacca in un campo di superfici minime superfici di uguale area.*

13. È interessante notare che quando si considera una trasformazione conforme tra due spazi tridimensionali V_3 e $\bar{V}_3$, [11], [12], [16], [17], la (8.1) permette di ricavare in forma estremamente semplice e sintetica, evitando il ricorso alla relazione tra i coefficienti della seconda forma fondamentale, la relazione che sussiste tra la curvatura media di un campo (σ) di superfici in V_3 e del suo trasformato $(\bar{\sigma})$ in $\bar{V}_3$, [12]. Poiché tra le derivate covarianti dei versori normali a (σ) e $(\bar{\sigma})$ sussiste la relazione [11]:

$$(13.1) \qquad e^{\mu}\, \bar{\nu}^i/_j = \nu^i/_j + \delta^i_j\, \mu_{/k}\, \nu^k - g^{ik}\, \mu_{/k}\, \nu_j$$

dalla cui contrazione rispetto agli indici i e j si ricava immediatamente

$$(13.2) \qquad e^{\mu}\, \bar{\nu}^i/_i = \nu^i/_i + 2\, \mu_{/i}\, \nu^i$$

si ottiene, per la (8.1),

$$(13.3) \qquad \bar{\mathrm{M}} = \bar{e}^{\mu}\, (\mathrm{M} - 2\, \mu_{/i}\, \nu^i)$$

che è la già menzionata relazione; dove il secondo termine in parentesi rappresenta quella che possiamo chiamare l'alterazione di curvatura indotta dalla trasformazione.

14. Un confronto dei risultati trovati per la curvatura geodetica di campi di curve superficiali e per la curvatura media di campi di superfici mette in rilievo l'analogia, nell'ambito delle considerazioni svolte, tra il significato

della curvatura geodetica e quello della curvatura media. Particolarmente significativo, a questo proposito, è il confronto tra le (6.1) ,(6.2) e le (12.1), (12.2), le prime due relative a famiglie di geodetiche, le seconde a campi di superfici minime.

BIBLIOGRAFIA.

[1] MC CONNELL A. J., *Application of the absolute differential calculus*, Blakie & Son, p. 190 (1947).

[2] *Loc. cit.*, p. 188.

[3] EISENHART L. P., *An introduction to differential geometry*, Princeton University Press, p. 201 (1947).

[4] *Loc. cit.*, p. 131.

[5] GAUSS K. F., *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Werke, Göttingen, *4*, 217–258 (1880).

[6] TAUCER G., *Alcune considerazioni sul teorema di Schols*, « Boll. di Geodesia e Sc. Affini », n. 2 (1954).

[7] BRAND L., *Vector and tensor Analysis*, John Wiley & Sons, p. 293, New York 1948.

[8] *Loc. cit.*, p. 317.

[9] FINZI B. e PASTORI M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, p. 20 sgg. Bologna 1951.

[10] WEATHERBURN C. E., *An introduction to Riemannian Geometry and the Tensor calculus*, Cambridge University Press, p. 45 (1963).

[11] HOTINE M., *Triply Ortogonal Coordinate Systems*, Third Symposium on Mathematical Geodesy, Torino 1965.

[12] MARUSSI A., *Einige Bemerkungen über die Anwendung der konformen Abbildungen in der dreidimensionalen Geodäsie*, Festschrift « Grossmann », 5 Gennaio 1967.

[13] MARUSSI A., *Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Serie VIII, vol. X, fasc. 4 (1951).

[14] MARUSSI A., *Sulle rappresentazioni fra superfici definite mediante la forma quadratica che ne determina il modulo di deformazione*, Festschrift « C. F. Baeschlin », Zürich 1957.

[15] MARUSSI A., *Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Serie VIII, vol. XVI, fasc. 4 (1954).

[16] BIANCHI L., *Lezioni di Geometria Differenziale*, III Ed., Zanichelli, Bologna, p. 468.

[17] HOTINE M., *Geodetic applications of Conformal Transformations in Three Dimensions*, Symposium on Mathematical Geodesy, Torino 1965.