Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Su alcune formule integrali in Magnetoidrodinamica. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 301–310.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_301_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Magnetoidrodinamica. — *Su alcune formule integrali in Magnetoidrodinamica.* Nota I (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider the slow motion of a incompressible, inviscid fluid, that has a high electric conductivity, plunged in a uniform magnetic field, within which an induced magnetic field is generated. Moreover it is subjected to forces of general kind, functions of place and of time.

We establish opportune equations for the field of the velocity vectors and for that of the pressure.

Finally, making use of the generalized formula of Kirchhoff, we give, by means of integral formulas, the performance of the components of the velocity, which are perpendicular to the applied magnetic field, and of the axial components of the vortex.

1. In questa prima Nota considero il moto lento di un fluido incompressibile di conduttività elettrica molto grande, tale da poterla ritenere infinita, immerso in un campo magnetico uniforme e soggetto a forze non elettromagnetiche di natura generica.

Con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali, con l'asse z nella direzione e nel verso del campo magnetico applicato, dopo aver eliminato dalle equazioni del moto il campo magnetico indotto, dimostro intanto che le due componenti u , v della velocità perpendicolare all'asse z soddisfano all'ordinaria equazione delle onde, in cui la costante di propagazione è la velocità delle onde di Alfvén. Ma le relative equazioni contengono ancora le derivate parziali della pressione e della componente assiale del vortice, che sono pure incognite.

Successivamente, con opportune trasformazioni ed eliminazioni riesco a dimostrare che la pressione p e le tre componenti u , v , w della velocità soddisfano ciascuna a un'equazione differenziale alle derivate parziali del 4° ordine, i cui primi membri hanno la stessa struttura e sono formati dal prodotto dell'operatore di Laplace e dell'operazione di propagazione ondosa nella direzione dell'asse z, mentre i secondi membri dipendono dalle componenti delle forze non elettromagnetiche agenti sul fluido.

Particolarmente notevole è il caso in cui queste forze derivano da un potenziale U. Introducendo in questo caso una opportuna funzione P, dipendente dalla pressione e dal potenziale delle forze, le equazioni precedenti si semplificano notevolmente e si ha che la detta funzione P e le componenti della velocità soddisfano ciascuna ad una stessa equazione differenziale. Dimostro inoltre come in questo caso le componenti della velocità e la funzione P, si possono far dipendere da una stessa funzione armonica.

Ritornando infine al caso generale, e prendendo in considerazione le prime equazioni stabilite, relative alle componenti u , v della velocità perpen-

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1968.

dicolari all'asse z, con opportune applicazioni della formula di Kirchhoff e mediante appropriate trasformazioni di integrali, stabilisco due formule integrali che esprimono, per ogni valore del tempo, i valori di dette componenti in un punto interno a un dato volume S, per mezzo dei valori delle stesse componenti e delle loro derivate normali sulla superficie σ che limita questo volume. Ma esse dipendono ancora dai valori della pressione e della componente assiale del vortice nel volume S e sulla superficie σ, oltre che dalle componenti delle forze non elettromagnetiche.

Da queste formule ho dedotto infine un'analoga equazione integrale per la componente assiale del vortice.

2. Consideriamo un fluido incompressibile, non viscoso, di conduttività elettrica infinita, immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$. Riferendoci al caso di piccoli movimenti, sia $\boldsymbol{v}$ la velocità delle particelle fluide ed $\boldsymbol{h}$ il campo magnetico indotto.

Trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{h}$, le equazioni del moto e di continuità risultano (1)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{h} \wedge \mathbf{H}_0 - \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} + \mathbf{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{2}$$

dove ρ è la densità costante del fluido, p la pressione idrodinamica, μ la permeabilità magnetica, pure costante, ed $\mathbf{F}$ la forza non elettromagnetica agente sul fluido, riferita all'unità di massa.

Si ha inoltre l'equazione del campo magnetico indotto

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{H}_0 \wedge \boldsymbol{v}) = 0, \tag{3}$$

con la condizione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0. \tag{4}$$

Con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali O $(x\,y\,z)$, con l'asse z nella direzione e nel verso del campo magnetico applicato $\mathbf{H}_0$, la (3) diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \mathrm{H}_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}. \tag{5}$$

Derivando ambo i membri della (1) rispetto al tempo ed eliminando la $\partial \boldsymbol{h}/\partial t$ per mezzo della (5) si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \wedge \boldsymbol{k} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \tag{6}$$

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cap. VI, par. 1, n° 1. – Edizioni Cremonese. Roma 1966.

dove $a^2 = \mu \mathrm{H}_0^2/\rho$ è il quadrato della velocità delle onde di Alfvèn, e $\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse z.

Prendendo le componenti di ambo i membri della (6) secondo gli assi x, y, indicando con u, v, w le tre componenti del vettore velocità $\boldsymbol{v}$, e con X, Y, Z quelle della forza $\mathbf{F}$, si hanno le seguenti equazioni scalari

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right) - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}\right) - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t}\,,
\end{aligned}
$$

mentre la (1), proiettata sull'asse z dà direttamente

$$
(8) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Z}.
$$

Indicando ancora con ω_1, ω_2, ω_3 le tre componenti di rot $\boldsymbol{v}$, le equazioni (7) si possono scrivere:

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\left(\Delta_2 u + \frac{\partial \omega_3}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\left(\Delta_2 v - \frac{\partial \omega_3}{\partial x}\right) - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t}\,, \quad \left(\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),
\end{aligned}
$$

alle quali va associata l'equazione (8), nonché l'equazione di continuità che diventa

$$
(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
$$

Il sistema formato dalle equazioni (9), (8), (10), in numero di quattro, contiene le quattro incognite u, v, w, p, e definisce queste incognite. Dalla (5) si ricava poi il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$.

Osserviamo che se si prende la divergenza di ambo i membri della (6), poiché

$$
\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \wedge \boldsymbol{k}\right) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \times \boldsymbol{k} = -\Delta_2 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \times \boldsymbol{k} = -\Delta_2 \frac{\partial w}{\partial z}\,,
$$

si ottiene l'equazione

$$
(11) \qquad \Delta_2\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial t} + a^2\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\cdot
$$

Da questa, eliminando la w, servendosi della (8), si ricava

$$
(12) \qquad \Delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{p}{\rho} = \operatorname{div}\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\,\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\,,
$$

che è un'equazione nella quale è incognita la sola pressione p. Una volta determinata la pressione p mediante la (12), la (8) fornisce la componente w della velocità con una quadratura rispetto al tempo.

È opportuno osservare ancora che prendendo il rotore di ambo i membri della (6), e ponendo $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, si ha

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial z^2} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \tag{13}$$

cioè la vorticità soddisfa all'equazione delle onde forzate propagantesi nella direzione dell'asse z. Pertanto la componente ω_3 del vettore $\boldsymbol{\omega}$, che figura nelle (9), è definita dall'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right). \tag{14}$$

Osserviamo ora che la (6) si può scrivere anche

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \tag{6'}$$

Applicando ad ambo i membri di questa l'operatore Δ_2 di Laplace, e tenendo conto della (11), si ottiene l'equazione

$$\Delta_2\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}\right) = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \tag{15}$$

nella quale è incognito il solo vettore velocità $\boldsymbol{v}$.

Le equazioni (12) e (15) mostrano che la pressione p e le tre componenti della velocità soddisfano ciascuna a un'equazione differenziale alle derivate parziali del 4° ordine, i cui primi membri hanno la stessa struttura e sono formati dal prodotto dell'operatore di Laplace e dell'operazione di propagazione ondosa nella direzione dell'asse z; i secondi membri dipendono invece dalle componenti delle forze non elettromagnetiche agenti sul fluido.

3. Particolarmente notevole è il caso in cui dette forze derivano da un potenziale U, e quindi $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathrm{U}$. In questo caso, posto

$$\mathrm{P} = \frac{p}{\rho} - \mathrm{U}, \tag{16}$$

la (12) diventa

$$\Delta_2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{17}$$

mentre la (15) si riduce senz'altro alla

$$\Delta_2\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{18}$$

Nel caso considerato la funzione P e la velocità $\boldsymbol{v}$ soddisfano dunque alla stessa equazione differenziale.

Mostriamo ancora come in questo caso la velocità $\boldsymbol{v}$ e la funzione P si possono far dipendere da una stessa funzione armonica.

Invero la (11) diventa

$$\Delta_2\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Essendo allora $f(x, y, z, t)$ una funzione armonica ($\Delta_2 f = 0$), segue che deve essere

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = f(x, y, z, t). \tag{19}$$

Ma la (6′) diventa

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

si ha perciò l'equazione

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad} f. \tag{20}$$

Inoltre, derivando la (19) rispetto al tempo, e osservando che la (8) porge

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{21}$$

si ha

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{22}$$

Le equazioni (20) e (22) mostrano quanto si era affermato.

4. Ritornando ora al caso generale, la forma delle equazioni (9) consente di esprimere le componenti u, v della velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide mediante equazioni integrali applicando la formula di Kirchhoff che generalizza il principio di Huyghens. Questa formula è, come si sa, relativa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \varphi = \Phi(x, y, z, t), \tag{23}$$

dove Φ si suppone una funzione nota del tempo t e delle coordinate x, y, z di un punto P, mentre a è una costante. Allora, essendo $\varphi(x, y, z, t)$ una funzione regolare in uno spazio S, limitato da una superficie σ, per tutti i valori del tempo, e soddisfacente alla (23), indicando con

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

la distanza del punto $P(x y z)$ da un altro punto $P'(x' y' z')$ interno ad S, e con n la normale *interna* a σ, si ha

$$4\pi\varphi(x', y', z', t) = \int_\sigma \left\{ \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x, y, z, \tau)\right]_{\tau = t - \frac{r}{a}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)\right\} d\sigma + \frac{1}{a^2}\int_S \Phi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}. \tag{24}$$

Lo spazio S si può estendere anche all'infinito, purché in questo caso la funzione φ si comporti all'infinito come le ordinarie funzioni potenziali. La formula (24) per $\Phi = 0$ si riduce alla formula originaria di Kirchhoff, la cui dimostrazione come si sa è stata oggetto di molte ricerche, con lo scopo di rimuovere alcune difficoltà di procedimento.

Per semplicità di scrittura porremo

$$\varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) = [\varphi]_a . \tag{25}$$

Inoltre, osservando che

$$\varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial}{\partial t} \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) =$$

$$= \left\{ \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) + \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial t} \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) \right\} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n},$$

introdurremo la notazione già usata da Somigliana [2].

$$[\varphi]_a^* = \left[\varphi + \frac{r}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_a . \tag{26}$$

Allora la formula (24) si può scrivere

$$4\pi\varphi(x', y', z', t) = \int_\sigma [\varphi]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_a \frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{a^2} \int_S [\Phi]_a \frac{dS}{r}, \tag{27}$$

e sotto questa forma la funzione $\varphi(x', y', z', t)$ viene espressa mediante un potenziale di doppio strato, un potenziale di strato semplice e un potenziale di volume.

Mediante l'applicazione della (27) dalle equazioni (9) ricaviamo

$$4\pi u(x', y', z', t) = \int_\sigma \left\{ [u]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_a \right\} d\sigma + \tag{28}$$

$$+ \int_S \left[\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{1}{a^2 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial X}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r}$$

$$4\pi v(x', y', z', t) = \int_\sigma \left\{ [v]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_a \right\} d\sigma + \tag{29}$$

$$+ \int_S \left[-\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{1}{a^2 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial Y}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} .$$

(2) C. SOMIGLIANA, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi* «Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino», vol. 41, 1906; vol. 42, 1907.

Per trasformare opportunamente queste formule osserviamo che si ha

$$\frac{\partial\,[\omega_3]_a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\omega_3\left(x\,,y\,,z\,,t-\frac{r}{a}\right) = \left[\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right]_a - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial\omega_3}{\partial t}\right]_a\frac{\partial r}{\partial x}$$

e quindi

$$\int_S \left[\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right]_a \frac{dS}{r} = \int_S \frac{\partial\,[\omega_3]_a}{\partial x}\,\frac{dS}{r} + \frac{1}{a}\int_S \left[\frac{\partial\omega_3}{\partial t}\right]_a \frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{dS}{r} =$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{[\omega_3]_a}{r}\right\} dS - \int_S \left[\omega_3 + \frac{r}{a}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial t}\right]_a \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS\,.$$

Il primo integrale dell'ultimo membro può essere trasformato in un integrale di superficie, osservando che se si esclude il punto $P'(x'\,,y',z')$ con una piccola sfera τ di raggio ε, e si passa a limite per $\varepsilon\to 0$, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S-\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{[\omega_3]_a}{r}\right\} dS = -\int_\sigma \frac{[\omega_3]_a}{r}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,d\sigma\,.$$

Allora, ricordando la posizione (26) si ha

$$\int_S \left[\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right]_a \frac{dS}{r} = -\int_\sigma [\omega_3]_a\,\frac{\partial x}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_S [\omega_3]_a^*\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS\,, \tag{30}$$

e analogamente

$$\int_S \left[\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right]_a \frac{dS}{r} = -\int_\sigma [\omega_3]_a\,\frac{\partial y}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_S [\omega_3]_a^*\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,dS\,. \tag{30'}$$

Così pure risulta

$$\left.\begin{aligned}
&\int_S \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} = -\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial x}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a^* \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS\\
&\int_S \left[\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} = -\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial y}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a^* \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,dS\,.
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Osserviamo ora che se poniamo

$$I\,(x',y',z',t) = \int_S [\varphi]_a\,\frac{dS}{r}\,,$$

per le proprietà dei potenziali di volume abbiamo

$$\frac{\partial I}{\partial x'} = \int_S\left\{\frac{\partial\,[\varphi]_a}{\partial x'}\,\frac{1}{r} + [\varphi]_a\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\right\} dS = \int_S\left\{-\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_a\frac{\partial r}{\partial x'} + [\varphi]_a\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\right\} dS =$$

$$= \int_S\left[\varphi + \frac{r}{a}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_a \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,dS = -\int_S [\varphi]_a^*\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS$$

e quindi

$$(32) \qquad \int_S [\varphi]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, dS = -\frac{\partial}{\partial x'} \int_S [\varphi]_a \frac{dS}{r} \, .$$

Tenendo conto delle relazioni (30), (30′), (31) e (32), le equazioni (28) e (29) diventano

$$(33) \quad \begin{aligned} 4\pi u(x', y', z', t) &= \int_\sigma \left\{ [u]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_a \right\} d\sigma - \int_\sigma [\omega_3]_a \frac{\partial y}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y'} \int_S [\omega_3]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{a^2 \rho} \left\{ \int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial x}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial x'} \int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} \right\} + \\ &+ \frac{1}{a^2} \int_S \left[\frac{\partial X}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} \\ 4\pi v(x', y', z', t) &= \int_\sigma \left\{ [v]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_a \right\} d\sigma + \int_\sigma [\omega_3]_a \frac{\partial x}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x'} \int_S [\omega_3]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{a^2 \rho} \left\{ \int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial y'} \int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial S}{r} \right\} + \\ &+ \frac{1}{a^2} \int_S \left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]_a \frac{\partial S}{r} \, , \end{aligned}$$

che sono le formule che volevamo stabilire.

È utile ancora osservare che, essendo il punto $P'(x', y', z')$ interno alla superficie σ, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \int_\sigma [u]_a \frac{\partial x}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} &= \int_\sigma \left\{ -\frac{1}{ar} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_a \frac{\partial r}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + [u]_a \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right\} d\sigma = \\ &= \int_\sigma \left\{ [u]_a + \frac{r}{a} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_a \right\} \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \, d\sigma = -\int_\sigma [u]_a^* \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\sigma \end{aligned}$$

cioè

$$\int_\sigma [u]^* \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\sigma = -\frac{\partial}{\partial x'} \int_\sigma [u]_a \frac{\partial x}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} \, ,$$

con due formule analoghe scambiando x con y e con z. Sommando membro a membro queste tre formule si ottiene

$$\int_\sigma [u]^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \, d\sigma = -\operatorname{div}_{P'} \int_\sigma [u]_a \, \boldsymbol{n} \frac{d\sigma}{r} \, ,$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale interna alla superficie σ.

Le equazioni (33) si possono pertanto mettere ancora sotto la forma

(34)
$$\begin{aligned}
4\pi u(x',y',z',t) &= -\operatorname{div}_{P'}\int_\sigma [u]_a\,\boldsymbol{n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_a \frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma [\omega_3]_a \frac{\partial y}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y'}\int_S [\omega_3]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{a^2\rho}\left\{\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial x}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial x'}\int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r}\right\} + \frac{1}{a^2}\int_S \left[\frac{dX}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} \\
4\pi v(x',y',z',t) &= -\operatorname{div}_{P'}\int_\sigma [v]_a\,\boldsymbol{n}\,\frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_a \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma [\omega_3]_a \frac{\partial x}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \\
&- \frac{\partial}{\partial x'}\int_S [\omega_3]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{a^2\rho}\left\{\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial y}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial y'}\int_S \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r}\right\} + \frac{1}{a^2}\int_S \left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r}.
\end{aligned}$$

5. Dalle equazioni (33) possiamo ora ricavare facilmente un'equazione integrale per la componente ω_3 di rot v, osservando che

$$\omega_3(x',y',z',t) = \frac{\partial}{\partial x'} v(x',y',z',t) - \frac{\partial}{\partial y'} u(x',y',z',t).$$

Si ottiene così

(35)
$$\begin{aligned}
4\pi\omega_3(x',y',z',t) &= \frac{\partial}{\partial x'}\int_\sigma \left\{[v]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_a\right\} d\sigma - \\
&- \frac{\partial}{\partial y'}\int_\sigma \left\{[u]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_a\right\} d\sigma + \frac{\partial}{\partial x'}\int_\sigma [\omega_3]_a \frac{\partial x}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\int_S [\omega_3]_a \frac{\partial y}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \\
&- \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)\int_S [\omega_3]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{a^2\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial y}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial y'}\int_\sigma \left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a \frac{\partial x}{\partial n}\frac{d\sigma}{r}\right\} + \\
&+ \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\int_S \left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial y'}\int_S \left[\frac{\partial X}{\partial t}\right]_a \frac{dS}{r}\right\}.
\end{aligned}$$

Poiché il punto $P'(x',y',z')$ è interno alla superficie σ, ricaviamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'}\int_\sigma [v]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma &= \int_\sigma \left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[v + \frac{r}{a}\frac{\partial v}{\partial t}\right]_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + [v]_a^* \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'\,\partial n}\right\} d\sigma = \\
&= -\frac{1}{a^2}\int_\sigma \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]_a \frac{\partial r}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} r\,d\sigma + \int_\sigma [v]_a^* \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'\,\partial n},
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial y'}\int_\sigma [u]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{a^2}\int_\sigma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]_a \frac{\partial r}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} r\,d\sigma + \int_\sigma [u]_a^* \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y'\,\partial n} d\sigma.$$

Sottraendo e sostituendo nella (35) si ha facilmente

$$
(36)\qquad 4\,\pi\omega_3\,(x',y',z',t) = \frac{1}{a^2}\int\limits_{\sigma}\left\{\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]_a\frac{\partial r}{\partial x} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]_a\frac{\partial r}{\partial y}\right\}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,r\,\mathrm{d}\sigma\,-
$$

$$
-\int\limits_{\sigma}\left\{[v]_a^*\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial n} - [u]_a^*\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial n}\right\}\mathrm{d}\sigma\,-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial x'}\int\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_a\frac{\mathrm{d}\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_a\frac{\mathrm{d}\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'}\int\limits_{\sigma}[\omega_3]_a\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r}\,+
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{\sigma}[\omega_3]_a\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)\int\limits_{S}[\omega_3]_a\frac{\mathrm{dS}}{r}\,+
$$

$$
+\frac{1}{a^2\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\int\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_a\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\int\limits_{S}\left[\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t}\right]_a\frac{\mathrm{dS}}{r} - \frac{\partial}{\partial y'}\int\limits_{S}\left[\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\right]_a\frac{\mathrm{dS}}{r}\right\}.
$$

che è un'equazione che va associata alle (34).