Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Venini

Energia quantistica relativistica di un corpuscolo soggetto ad azioni gravitazionali ed elettromagnetiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 283–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_283_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Fisica matematica. — *Energia quantistica relativistica di un corpuscolo soggetto ad azioni gravitazionali ed elettromagnetiche* (*). Nota di CARLO VENINI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — Within the terms of the relativistic quantum Mechanics is determined the behaviour of a material and electrically charged particle, affected by gravitational and electromagnetic actions. In order to integrate the state equation, the energy of the particle is restricted to assume only particular numerable values: more exactly we obtain a discrete spectrum of energy levels.

By regarding, at the limit, the square of the speed of light in vacuum as being infinite, we reach the well known results of non relativistic quantum Theory.

In un riferimento inerziale dello spazio–tempo pseudoeuclideo della Relatività ristretta lo stato quantico di una particella materiale, di spin trascurabile, dotata di carica elettrica e soggetta solo ad azioni elettromagnetiche, è fornito dall'equazione differenziale di Klein–Gordon [1]. In questa equazione interviene come incognita la funzione di stato ψ, della quale è conosciuto il significato fisico: il prodotto $\psi\psi^*$, con ψ^* coniugata di ψ, dà la misura della densità di probabilità che ha il corpuscolo di trovarsi, ad un determinato istante, in una assegnata posizione dello spazio.

Introducendo il quadrivettore potenziale, le cui componenti spaziali covarianti, in un riferimento inerziale, si identificano notoriamente con quelle del potenziale vettore e la cui componente temporale coincide con il potenziale scalare, la precedente equazione può porsi in forma tensoriale; sotto tale forma sussiste allora in un generico sistema di riferimento.

In questa Nota determino il comportamento quantistico relativistico di una particella materiale elettrizzata P_1, sottoposta non solo al campo elettromagnetico, ma anche al campo gravitazionale generato da un secondo corpuscolo P_2. Per la presenza del campo gravitazionale il problema appartiene alla Relatività generale. Suppongo allora che il campo complessivo di P_2 coincida con quello ben noto di Schwarzschild [2] riguardante un corpuscolo supporto di massa e di carica elettrica, e ritengo che, nel corrispondente spazio–tempo riemanniano, lo stato quantico di P_1 venga descritto da una funzione soluzione di una equazione identica a quella tensoriale di Klein–Gordon della Relatività ristretta.

Questa equazione contiene significativi termini correttivi rispetto a quella quantistica non relativistica di Schrödinger e ad essa si riduce al limite, trattando il quadrato della velocità della luce nel vuoto come un infinito.

Alla metrica di Schwarzschild è associata, dal punto di vista classico, una funzione lagrangiana la quale non dipende esplicitamente dal tempo [3];

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1968.

la corrispondente funzione hamiltoniana uguaglia allora, durante il moto, una costante [4]. Identifico tale costante con l'energia totale della particella. L'integrazione dell'equazione di stato implica che questa grandezza possa assumere solo particolari valori numerabili: ottengo precisamente uno spettro discreto di livelli energetici.

1. L'EQUAZIONE DI STATO DELLA RELATIVITÀ GENERALE. – Nello spazio-tempo riemanniano della Relatività generale, supponiamo che il campo generato da una particella P_2, fornita di massa intrinseca M e carica elettrica Q, sia quello ben noto di Schwarzschild generalizzato. La metrica assume allora la seguente forma differenziale quadratica:

$$\text{(1)} \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 [2],$$

dove c rappresenta la velocità della luce nel vuoto rispetto ad un osservatore inerziale e t il tempo. Inoltre, stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio geometrico V_3 e quelli di uno spazio euclideo S_3, r, θ, φ sono le coordinate di V_3 che corrispondono a un sistema di coordinate polari in S_3; la prima risulta funzione del solo raggio vettore, le rimanenti due coincidono rispettivamente con la latitudine e con la longitudine [5]. Nella (1) si è infine posto:

$$\text{(I)} \qquad \alpha = \frac{2kM}{c^2} \quad ; \quad \beta = \frac{kQ^2}{c^4},$$

essendo k la costante di attrazione universale.

Detto $g_{\alpha\beta}$ il tensore fondamentale (1), posto $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, nel sistema di riferimento (1) si ha:

$$\text{(II)} \qquad g_{00} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \quad ; \quad g_{0s} = 0 \quad ; \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1};$$

$$g_{22} = -r^2 \quad ; \quad g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad ; \quad g_{ms} = 0 \ (m \neq s).$$

Se il corpuscolo che crea il campo possiede dimensioni atomiche, risulta:

$$\text{(2)} \qquad \frac{kM^2}{Q^2} < 1;$$

ad esempio, nel caso di un elettrone il primo membro della (2) vale approssimativamente 10^{-42}, per una particella α si ha: $\frac{kM^2}{Q^2} \simeq 6{,}66 \cdot 10^{-36}$[6].

Dalle (I) segue $\alpha^2 - 4\beta < 0$ e dalla prima delle (II) si deduce allora $g_{00} > 0$ per qualunque valore di r.

(1) Gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, quelli latini i soli valori 1, 2, 3. La barra è simbolo di derivazione tensoriale, la virgola di derivazione parziale. È sottintesa la sommatoria rispetto agli indici di covarianza (posti in basso) e di controvarianza (in alto) che si saturano.

Consideriamo un'altra particella P_1 di dimensioni assai piccole, dotata di massa intrinseca m, carica elettrica q e spin nullo (ad esempio, una particella α) e soggetta al campo sintetizzato dalle (II).

Nell'ambito della Relatività ristretta, in un sistema di riferimento spazio–temporale che dà alla metrica forma pseudopitagorica, lo stato quantico di un corpuscolo soggetto all'azione di un assegnato campo elettromagnetico è notoriamente descritto da una funzione ψ soluzione della seguente equazione differenziale di Klein–Gordon:

$$\Box\psi + \frac{4\pi iq}{hc}\left(V\frac{\partial\psi}{\partial x^0} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\psi\right) + \frac{2\pi iq}{hc}\left(\frac{\partial V}{\partial x^0} - \operatorname{div}\mathbf{A}\right)\psi -$$
$$- \frac{4\pi^2 q^2}{h^2c^2}(V^2 - A^2)\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}m^2c^2\psi = 0,$$

dove $\Box$ rappresenta l'operatore di D'Alembert in forma ordinaria, i l'unità immaginaria, h la costante di Planck, V il potenziale scalare, $\mathbf{A}$ il potenziale vettore. Detta η_α la generica componente covariante del potenziale spazio–temporale, nel menzionato sistema di riferimento si ha: $\eta_0 = V$; $\eta_s = A_s$; $g^{00} = 1$; $g^{ss} = -1$; $g^{\lambda\sigma} = 0$ $(\lambda \neq \sigma)$ e la precedente può porsi sotto la forma:

$$(3) \qquad g^{\lambda\sigma}\psi_{/\lambda\sigma} + \frac{2\pi iq}{hc}(2g^{\lambda\sigma}\eta_\lambda\psi_{/\sigma} + g^{\lambda\sigma}\eta_{\lambda/\sigma}\psi) - \frac{4\pi^2q^2}{h^2c^2}g^{\lambda\sigma}\eta_\lambda\eta_\sigma\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}m^2c^2\psi = 0.$$

La (3), essendo una equazione tensoriale, è valida in ogni riferimento. È ragionevole ritenere che tale equazione sussista pure in Relatività generale, ossia quando la particella è soggetta anche ad azioni gravitazionali. Osserviamo allora che, a causa della seconda e dell'ultima delle (II), nel riferimento (1) si ha:

$$(\mathrm{III}) \qquad g^{00} = \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} \quad ; \quad g^{0s} = 0 \quad ; \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right);$$
$$g^{22} = -r^{-2} \quad ; \quad g^{33} = -r^{-2}\,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta \quad ; \quad g^{ms} = 0 \qquad (m \neq s).$$

Risulta poi:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \eta_0 = \frac{Q}{r} \quad ; \quad \eta_s = 0 \quad [7].$$

Per le (II), (III), (IV), e per la nota formula di derivazione covariante, la (3) diviene:

$$(4) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} +$$
$$+ \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{4\pi^2m^2c^2}{h^2}\psi -$$
$$- \frac{4\pi^2q^2Q^2}{c^2h^2}\frac{1}{r^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)}\psi + \frac{4\pi iqQ}{c^2h}\frac{1}{r\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Come già nella teoria quantistica non relativistica, cerchiamo di soddisfare alla (4) assumendo:

$$\psi = u(r, \theta, \varphi)\, e^{-2\pi i \frac{E}{h} t}, \tag{5}$$

essendo u una funzione delle sole coordinate spaziali e la costante E l'energia totale.

2. L'ENERGIA TOTALE DEL CORPUSCOLO. – Osserviamo che alla metrica (1) corrisponde la classica funzione lagrangiana [3]:

$$L = -mc^2 \Sigma - qu^{\lambda} \eta_{\lambda} \Sigma, \tag{6}$$

essendo:

$$\Sigma = \frac{ds}{c dt} = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2}(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2)}, \tag{7}$$

$u^{\lambda} = \dfrac{dx^{\lambda}}{ds}$ la generica componente controvariante del quadrivettore velocità relativistica. Si deduce allora, per la definizione (7) e le (IV):

$$u^{\lambda} \eta_{\lambda} = u^0 \eta_0 = \frac{c dt}{ds} \frac{Q}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{Q}{r}, \tag{8}$$

e la (6) assume quindi la forma:

$$L = -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2}(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2)} - \frac{qQ}{r}. \tag{9}$$

Poiché la funzione lagrangiana fornita dalla (9) non dipende esplicitamente dal tempo, risulta:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = H, \tag{10}$$

con H costante [4].

Identifichiamo l'energia totale E presente al secondo membro della (5) con la costante H, ossia con l'energia totale di un sistema che si muove obbedendo alle leggi della meccanica classica e che possiede la (9) come funzione lagrangiana. Dalla (9) e dalla (10) si trae allora:

$$\frac{mc^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2}(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2)}} + \frac{qQ}{r} = E. \tag{11}$$

La (4), per la (5), assume la forma:

$$\begin{aligned} &\frac{4\pi^2 E^2}{c^2 h^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}} u + \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{r}\left(2 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{cotg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} u + \\ &+ \frac{4\pi^2 q^2 Q^2}{c^2 h^2} \frac{1}{r^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)} u - \frac{8\pi^2 qQE}{c^2 h^2} \frac{1}{r\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)} u = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

3. SEPARAZIONE DELLE VARIABILI NELL'EQUAZIONE (12). – Cerchiamo di soddisfare alla (12) assumendo:

$$u(r, \theta, \varphi) = \mathrm{R}(r)\, y(\theta, \varphi), \tag{13}$$

ossia ricorrendo al ben noto metodo di separazione delle variabili. Sostituendo la (13) nella (12) si ottiene, dopo qualche calcolo:

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi^2\mathrm{E}^2}{c^2 h^2}\,\frac{r^2}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2 - \frac{4\pi^2 q^2 \mathrm{Q}^2}{c^2 h^2}\,\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} + \\ & + \frac{8\pi^2 q \mathrm{QE}}{c^2 h^2}\,\frac{r}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} - r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)\frac{\ddot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} + (\alpha - 2r)\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} + \\ & + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\,\frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{1}{y}\,\frac{\partial y}{\partial\theta}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Osserviamo che il primo membro della (14) è funzione della sola r, mentre il secondo dipende unicamente dalle rimanenti variabili θ e φ. Di conseguenza è necessario che ciascuno di essi uguagli una costante $-\mathrm{D}$. Si ha in tal modo:

$$\frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\,\frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \mathrm{cotg}\,\theta\,\frac{1}{y}\,\frac{\partial y}{\partial\theta} = -\mathrm{D}\,; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)\frac{\ddot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} + (2r-\alpha)\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} + \frac{4\pi^2\mathrm{E}^2}{c^2 h^2}\,\frac{r^2}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} - \\ & - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2 + \frac{4\pi^2 q^2 \mathrm{Q}^2}{c^2 h^2}\,\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} - \frac{8\pi^2 q\mathrm{QE}}{c^2 h^2}\,\frac{r}{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}} = \mathrm{D}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

La (15) coincide con l'equazione che, nella Meccanica quantistica non relativistica, è valida in tutti i problemi in cui intervengono solo forze centrali. Si ha quindi:

$$\mathrm{D} = l\,(l+1), \tag{17}$$

con l intero non negativo; detto p un intero con $|p| \leq l$, si soddisfa alla (15) per mezzo delle funzioni sferiche:

$$y_{lp} = \mathrm{A}_{lp}\, e^{ip\varphi}\, \mathrm{sen}^{|p|}\,\theta\,\frac{d^p\,\mathrm{P}_l(z)}{d\,(z)^p}\,,$$

con A_{lp} costanti disponibili, $z = \cos\theta$ e $\mathrm{P}_l(z)$ generico polinomio di Legendre [8].

La (16), in base alla (17), si può presentare sotto la forma:

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathrm{R}} + \frac{2r-\alpha}{r^2-\alpha r+\beta}\,\dot{\mathrm{R}} + \left[\frac{4\pi^2\mathrm{E}^2}{c^2h^2}\,\frac{r^4}{(r^2-\alpha r+\beta)^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\,\frac{r^2}{r^2-\alpha r+\beta} + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi^2 q^2\mathrm{Q}^2}{c^2h^2}\,\frac{1}{r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2} - \frac{8\pi^2 q\mathrm{QE}}{c^2h^2}\,\frac{1}{r\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2} - l\,(l+1)\,\frac{1}{r^2-\alpha r+\beta}\right]\mathrm{R} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

4. La forma limite dell'equazione radiale (18). – Passiamo al limite facendo tendere c^2 all'infinito. Dalle (I) segue:

$$\lim_{c^2\to\infty} \alpha = 0 \quad ; \quad \lim_{c^2\to\infty} \beta = 0; \tag{V}$$

dalla (11), per le (V), si trae:

$$\lim_{c^2\to\infty} \frac{E}{c^2} = m; \tag{19}$$

$$m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{\bar{v}^2}{c^2} + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}}\right)} \right] - \tag{20}$$

$$- \frac{q^2 Q^2}{c^2 r^2} - \frac{2\, mqQ \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)}{r \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{\bar{v}^2}{c^2} + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}}\right)}},$$

avendo posto:

$$\bar{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2). \tag{21}$$

Tenendo conto delle (I) e (V), dalla (20) si deduce, dopo qualche calcolo:

$$\lim_{c^2\to\infty} \cdot \left(m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = -2\, m \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 - \frac{kmM}{r} + \frac{qQ}{r}\right). \tag{22}$$

Osserviamo, in base alla (1), che la metrica dello spazio geometrico tridimensionale è fornita da:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2;$$

si ha quindi:

$$v^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2, \tag{23}$$

essendo v la velocità del corpuscolo P_1.

Facendo tendere c^2 all'infinito, dalla (23) e dalla (21) segue, per le (V): $\lim_{c^2\to\infty} v^2 = \bar{v}^2$; al limite, la velocità tende così ad assumere la forma che le compete in Meccanica classica, ritenendo la particella mobile nell'ordinario spazio tridimensionale euclideo, del quale r, θ, φ costituiscono un sistema di coordinate polari, con il polo nella posizione occupata dal corpuscolo di massa intrinseca M e carica elettrica Q. Il primo termine posto entro parentesi al secondo membro della (22) si identifica allora con la classica energia cinetica di P_1, mentre il secondo e il terzo addendo coincidono rispettivamente con l'energia potenziale della classica forza gravitazionale e della classica forza elettrostatica, esercitate da P_2 su P_1. Dalla (22) segue in definitiva:

$$\lim_{c^2\to\infty} \left(m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = -2\, mW, \tag{24}$$

rappresentando la costante W la classica energia totale di P_1.

Al limite la (18), per le (V), (19) e (24), diviene:

$$\ddot{\mathrm{R}} + \frac{2}{r}\dot{\mathrm{R}} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\mathrm{W} + \frac{hm\mathrm{M}}{r} - \frac{q\mathrm{Q}}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\mathrm{R} = 0; \tag{25}$$

la (25) coincide con la ben nota equazione radiale di Schrödinger della fisica quantistica non relativistica.

Osserviamo che alcuni termini della equazione relativistica (18) si scostano notevolmente dai corrispondenti dell'equazione classica (25), ai quali tendono trattando c^2 come un infinito.

Consideriamo, ad esempio, il termine $-\frac{8\pi^2 q\mathrm{Q}}{h^2}\frac{1}{r\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2}\frac{\mathrm{E}}{c^2}\mathrm{R}$.

Dalla (11) e dalla (23) si trae:

$$\frac{\mathrm{E}}{c^2} = \frac{m\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{V}^2}}} + \frac{q\mathrm{Q}}{c^2 r},$$

essendo $\mathrm{V} = c\sqrt{g_{00}} = c\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}}$ la velocità della luce nel sistema di riferimento (1). Si ha allora:

$$-\frac{8\pi^2 q\mathrm{Q}}{h^2}\frac{1}{r\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2}\frac{\mathrm{E}}{c^2}\mathrm{R} = -\frac{8\pi^2 mq\mathrm{Q}}{h^2 r}\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{V}^2}}} - \tag{18'}$$

$$-\frac{8\pi^2 q\mathrm{Q}}{h^2 r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2}\frac{q\mathrm{Q}}{c^2}\mathrm{R},$$

e quindi:

$$-\frac{8\pi^2 q\mathrm{Q}}{h^2}\frac{1}{r\left(1-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}\right)^2}\frac{\mathrm{E}}{c^2}\mathrm{R} = -\frac{8\pi^2 mq\mathrm{Q}}{h^2 r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\mathrm{V}^2}}}\mathrm{R} + \cdots \tag{18''}$$

I puntini nella (18'') comprendono sia il secondo addendo al secondo membro della (18'), sia i successivi termini dello sviluppo in serie di $1/c^2$ (conformemente alle (I)) del primo addendo. Se la velocità della particella è, come supponiamo, dello stesso ordine di grandezza di quella della luce, il termine in evidenza al secondo membro della (18'') differisce notevolmente da $-\frac{8\pi^2 mq\mathrm{QR}}{h^2 r}$, ossia dal corrispondente termine classico presente nella (25).

6. INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE RADIALE (18). – Facendo tendere r all'infinito l'equazione (18) assume la forma asintotica:

$$\ddot{\mathrm{R}} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left(m^2c^2 - \frac{\mathrm{E}^2}{c^2}\right)\mathrm{R} = 0. \tag{26}$$

Ritenendo:

$$\mathrm{E}^2 < m^2 c^4, \tag{27}$$

posto quindi:

$$m^2c^2 - \frac{\mathrm{E}^2}{c^2} = \varepsilon^2, \tag{28}$$

l'integrale generale della (26) è il seguente:

$$R = C_1 e^{-\frac{2\pi\varepsilon}{h} r} + C_2 e^{\frac{2\pi\varepsilon}{k} r},$$

con C_1 e C_2 costanti a priori arbitrarie. Imponendo la condizione che R si annulli all'infinito, si trae $C_2 = 0$; cercheremo allora della (18) una soluzione esatta del tipo:

$$R = e^{-\frac{2\pi\varepsilon}{h} r} F(r). \tag{29}$$

Sostituendo la (29) nella (18), quest'ultima si trasforma nella seguente:

$$\begin{aligned}(30)\qquad & (r^2 - \alpha r + \beta)^2 \ddot{F} + \left[(2r - \alpha)(r^2 - \alpha r + \beta) - \frac{4\pi\varepsilon}{h}(r^2 - \alpha r + \beta)^2\right]\dot{F} + \\ & + \left[\frac{2\pi\varepsilon}{h}(\alpha - 2r)(r^2 - \alpha r + \beta) - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2 (\beta - \alpha r) + \frac{4\pi^2 q^2 Q^2}{c^2 h^2} r^2 - \right. \\ & - \frac{8\pi^2 q QE}{c^2 h^2} r^3 - l(l+1)(r^2 - \alpha r + \beta) + \\ & \left. + \frac{4\pi^2\varepsilon^2}{h^2}(\alpha^2 r^2 + \beta^2 - 2\alpha r^3 + 2\beta r^2 - 2\alpha\beta r)\right] F = 0 .\end{aligned}$$

La (30) è una equazione differenziale del secondo ordine, del tipo:

$$P_0(r)\ddot{F} + P_1(r)\dot{F} + P_2(r) F = 0.$$

Posto:

$$Q_0 = P_0 \quad ; \quad Q_1 = rP_1 \quad ; \quad Q_2 = r^2 P_2, \tag{VI}$$

risulta:

$$\begin{aligned}(\text{VII})\qquad & Q_0 = (r^2 - \alpha r + \beta)^2 ; \\ & Q_1 = r\left[(2r - \alpha)(r^2 - \alpha r + \beta) - \frac{4\pi\varepsilon}{h}(r^2 - \alpha r + \beta)^2\right] ; \\ & Q_2 = r^2\left[\frac{2\pi\varepsilon}{h}(\alpha - 2r)(r^2 - \alpha r + \beta) - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2(\beta - \alpha r) + \frac{4\pi^2 q^2 Q^2}{c^2 h^2} r^2 - \right. \\ & \left. - \frac{8\pi^2 q QE}{c^2 h^2} r^3 - l(l+1)(r^2 - \alpha r + \beta) + \frac{4\pi^2\varepsilon^2}{h^2}(\alpha^2 r^2 + \beta^2 - 2\alpha r^3 + 2\beta r^2 - 2\alpha\beta r)\right] .\end{aligned}$$

Detto μ il grado massimo dei polinomi Q_K ($K = 0, 1, 2$) e $Q_{K\mu}$ i coefficienti di r^μ nelle Q_K, dalle (VII) segue $\mu = 5$ e:

$$\begin{aligned}(\text{VIII})\qquad & Q_{0\mu} = 0 \quad ; \quad Q_{1\mu} = -\frac{4\pi\varepsilon}{h} ; \\ & Q_{2\mu} = -\frac{4\pi\varepsilon}{h} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2 \alpha}{h^2} - \frac{8\pi^2 q QE}{c^2 h^2} - \frac{8\pi^2\varepsilon^2\alpha}{h^2} .\end{aligned}$$

Grazie ad un teorema di Poincaré [9] riguardante le equazioni differenziali lineari i cui coefficienti sono polinomi, la (30), per la prima delle (VIII), ammette una soluzione del tipo:

$$F = r^\gamma \sum_0^\infty {}_m\, b_m r^{-m} \tag{31}$$

per $r > p$, dove p rappresenta il più elevato valore della coordinata raggio delle singolarità. Gli eventuali punti singolari della (30) posseggono coordinata raggio soluzione dell'equazione $P_0 = 0$, ossia $r^2 - \alpha r + \beta = 0$. Per le (I) e la (2), la precedente non ammette radici reali, quindi non esistono punti singolari; la (31) è allora convergente per ogni valore di r. In essa le b_m sono dei coefficienti costanti e γ un intero non negativo, che deve soddisfare all'equazione:

$$\gamma(\gamma - 1) Q_{0\mu} + \gamma Q_{1\mu} + Q_{2\mu} = 0 \quad [10],$$

ossia, per le (VIII):

$$\frac{2\pi\alpha}{h}\varepsilon^2 + (\gamma + 1)\varepsilon - \frac{\pi m^2 c^2 \alpha}{h} + \frac{2\pi q Q E}{c^2 h} = 0. \tag{32}$$

6. I LIVELLI ENERGETICI. – Posto $\gamma + 1 = N$ $(N = 1, 2, \cdots)$, la (32), per la (28), dà luogo alla seguente equazione di quarto grado in E:

$$\frac{4\pi^4\alpha^2}{c^4 h^2} E^4 - \frac{8\pi^4\alpha q Q}{c^4 h^2} E^3 + \left(\frac{N^2}{c^2} + \frac{4\pi^4 q^2 Q^2}{c^4 h^2} - \frac{4\pi^4 m^2 \alpha^2}{h^2}\right) E^2 + \tag{33}$$
$$+ \frac{4\pi^4 m^2 \alpha q Q}{h^2} E + \frac{\pi^4 m^4 c^4 \alpha^2}{h^2} - N^2 m^2 c^2 = 0.$$

Osserviamo che, in assenza di carica elettrica, la (33) si riduce all'equazione biquadratica:

$$\frac{4\pi^4\alpha^2}{c^4 h^2} E^4 + \left(\frac{N^2}{c^2} - \frac{4\pi^4 m^2 \alpha^2}{h^2}\right) E^2 + \frac{\pi^4 m^4 c^4 \alpha^2}{h^2} - N^2 m^2 c^2 = 0. \tag{34}$$

Ritenendo, come è lecito per particelle atomiche, $\frac{2\pi^2 kmM}{hc} < 1$, il termine noto della (34) per la prima delle (I) risulta negativo per ogni valore di N; la (34) ammette allora due radici opposte reali e due radici opposte immaginarie. Si ha dunque:

$$E_1 = a \quad ; \quad E_2 = -a \quad ; \quad E_3 = bi \quad ; \quad E_4 = -bi, \tag{IX}$$

con a e b assegnate costanti reali.

Di conseguenza l'equazione (33), oltre a due radici complesse coniugate, possiede due radici reali. Infatti, se così non fosse, le quattro radici della (23) sarebbero;

$$E_1 = \xi + i\eta \quad ; \quad E_2 = \xi - i\eta \quad ; \quad E_3 = \lambda + i\omega \quad ; \quad E_4 = \lambda - i\omega, \tag{X}$$

con $\xi, \eta, \lambda, \omega$, costanti reali dipendenti in genere dalle cariche elettriche dei due corpuscoli; ma, annullando q e Q, le prime due radici (X) non possono ridursi alle prime due (IX).

Dunque, ad ogni intero N corrispondono due valori dell'energia, soluzioni dell'equazione energetica (33); si ha in tal modo uno spettro discreto di livelli energetici.

Sostituendo la (31) nella (30) si possono senza difficoltà dedurre le relazioni di ricorrenza che intercedono fra i coefficienti b_m della (31) stessa. Se si considera infine una particella non elettrizzata si ritrovano, come caso particolare, i risultati ottenuti da Bel [11].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] Cfr. L. SCHIFF, *Meccanica Quantistica*, traduz. di L. A. RADICATI DI BROZOLO, p. 443, Torino 1959.

[2] Cfr. S. A. EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*, p. 185, Cambridge 1957.

[3] Cfr. P. BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, p. 119, New Jork 1958.

[4] Cfr. B. FINZI, *Meccanica Razionale*, vol. 2, p. 268, Bologna 1950.

[5] Cfr. B. FINZI, *Cinquant'anni di Relatività*, p. 235, Firenze 1955.

[6] Cfr. S. TOLANSKY, *Introduzione alla Fisica Atomica*, traduz. di R. RIZZI, p. 314 (1950).

[7] Cfr. W. PAULI, *Teoria della Relatività*, traduz. di P. GULMANELLI, p. 254, Torino 1958.

[8] Cfr. E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica Atomica*, p. 216, Bologna 1936.

[9] Cfr. A. R. FORSYTH, *Theory of differential equations*, p. 173, London 1963.

[10] Cfr. P. CALDIROLA, *Lezioni di Fisica Teorica*, vol. 2, p. 334, Milano.

[11] L. BEL, *Relatività Generale* (Conferenze tenute al C.I.M.E. nel luglio 1964), Roma 1965.