Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edison Farah

Equivalenza tra gli assiomi di completezza e continuità nelle rette archimedee

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 257–271.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_257_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Geometria. — *Equivalenza tra gli assiomi di completezza e continuità nelle rette archimedee.* Nota di EDISON FARAH, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

SUMMARY.—It is proved, without using real numbers and properties of the plane, that in an archimedian line, in which only the axioms of order and congruence are introduced, the classical axioms of continuity of Dedekind and of completeness of Hilbert are equivalent.

Se si introduce, facendo uso della Teoria degli Insiemi [1], la nozione di *retta*, in senso più debole di quello abituale e cioè con i soli assiomi dell'ordine e della congruenza, quali esposti, per esempio, in Hilbert [1], si può dare una formulazione assai spontanea al cosiddetto *Assioma della Continuità* di Dedekind (Assioma (D)).

Questo assioma, nelle rette *archimedee* (rette che soddisfano all'assioma di Archimede circa la ripetizione di un segmento dato) è equivalente a quello di *Completezza* di Hilbert (Assioma V_2, in [1]), qui chiamato *Assioma* (H). Questa equivalenza si può dimostrare usando i numeri reali, quando si ammette che, in una retta archimedea, ogni segmento può essere diviso in un numero qualsiasi di segmenti congrui tra loro.

Ci proponiamo di stabilire questa equivalenza, *senza uscire dalla retta e senza l'uso dei numeri reali* [2].

Il nostro obiettivo è, in primo luogo, di dare una formulazione precisa alla questione e, in seguito, risolverla.

Cominceremo coll'introdurre la nozione di *retta*, nel senso sopra indicato.

§ 1. – RETTE E SOTTO-RETTE. RETTE ARCHIMEDEE. ASSIOMA (H) DI COMPLETEZZA DI HILBERT.

1\. – Sia R un insieme i cui elementi saranno chiamati *punti*, e consideriamo una relazione binaria η tra gli elementi di R ed $R \times R$ (prodotto cartesiano di R per R) in cui

$$x\eta(y, z)$$

(*) Nella seduta del 19 novembre 1968.

(1) Ci si può, ad esempio, fondare sulla teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel [3] pp. 8–22. (Nel presente lavoro, gli assiomi della scelta, di sostituzione, di regolarità ed anche l'assioma d'infinità, non sono essenziali).

(2) La questione di stabilire tale equivalenza in questo modo ci è stata proposta dal prof. Benedito Castrucci, dell'Università di San Paolo.

si legge: « x è (o si trova) tra y e z », e supponiamo che siano verificati gli assiomi:

I′–3. R possiede almeno due punti distinti;

II′–1. Se x, y e z sono punti di R in modo che x sia tra y e z, allora i punti x, y e z sono tutti distinti e x è tra z e y. (In simboli: $x\eta(y, z)$ implica $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$ e $x\eta(z, y)$).

II′–2. Dati, in R, due punti distinti qualsivoglia, x e y, esistono punti z e w di R in modo che z sia tra x e y, e y tra x e w;

II′–3. Dati, in R, tre punti tutti distinti, allora uno e soltanto uno di questi è tra gli altri due;

II′–4. Dati, in R, quattro punti tutti distinti, è sempre possibile disporli in una successione (x_1, x_2, x_3, x_4) in modo che x_2 sia tra x_1 e x_3 e tra x_1 e x_4, e x_3 sia tra x_1 e x_4 e tra x_2 e x_4.

Diremo, allora, che η è un *ordine «tra»* (oppure, un *ordine originale*) *per* l'insieme R; e questo si dice *dotato* dell'ordine (originale o «tra») η.

Una conseguenza degli assiomi di cui sopra è la seguente: *Se i punti x y, z e w di* R *sono tali che y è tra x e z, ed z è tra y e w, allora, z è tra x e w.*

Nota. – Gli assiomi II′–2 e II′–3 non differiscono dai corrispondenti II,2 e II,3 in [2]. Le condizioni in più che si esigono in II′–2 e II′–3, rispetto agli assiomi II_2 e II_3 di [1], così come l'assioma II′–4 (che in [2] è II,4) appaiono, in [1], come conseguenza di altri assiomi, relativi al piano, e perciò non saranno usati in questo lavoro.

2. *Segmenti e sezioni determinati da un punto di* R.

Definizione. – Dati i punti a e b di R, si chiama *segmento* di R, di estremità a e b, l'insieme dei punti di R situati tra a e b. Il segmento di estremità a e b è simbolizzato da ab oppure da ba. Un punto di R si dice *interno* oppure *esterno* al segmento ab secondo sia o no tra a e b.

Per definire la *sezione* di R *determinata da un punto di* R, dimostriamo, in primo luogo, il

TEOREMA 1. – *Se m è un punto di* R, *esistono gli insiemi* M_1 *e* M_2, *contenuti in* R, *che soddisfano alle seguenti condizioni*:

1 *a*. $M_1 \cap M_2 = \varnothing$;

2 *a*. *Dati i punti qualsivoglia, x e y di* R, *allora m è tra x e y quando e soltanto quando* $x \in M_1$ *e* $y \in M_2$ *oppure* $x \in M_2$ *e* $y \in M_1$. *Inoltre, se* M'_1 *e* M'_2 *sono sottoinsiemi di* R *nelle condizioni di* M_1 *e* M_2, *allora* $M'_1 = M_1$ *e* $M'_2 = M_2$ *oppure* $M'_2 = M_1$ *e* $M'_1 = M_2$.

Dimostrazione. – Per dimostrare l'esistenza dei sottoinsiemi M_1 e M_2 nelle condizioni di cui sopra basta considerare un punto qualsiasi $b \in R$ distinto da m e prendere, per esempio, come M_1, l'insieme formato dai punti x di R per i quali m è tra x e b. Ponendo $M_2 = R\,(M_1 \cup \{m\})$, le due condizioni sopradette saranno soddisfatte. Infatti, in primo luogo, è chiaro che $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, ed anche che $M_1 \cup M_2 = R - \{m\}$. Essendo, ora, x e y due punti qualsiasi di R, tali che m sia tra x e y, e supposto, per esempio, $x \in M_1$, si avrà $y \in M_2$. Infatti, se $y = b$, non vi è nulla da verificare, poiché

$b \in M_2$; se $y = b$, i punti x, y, m e b saranno due a due distinti. Allora, d'accordo con l'assioma II'–4, le uniche successioni in cui possono essere disposti, compatibili con il fatto che m è tra x e b e tra x e y, sono le quattro seguenti:

$$(x , m , y , b) \ , \ (x , m , b , y) \ , \ (y , b , m , x) \quad \text{e} \quad (b , y , m , x).$$

Siccome in nessuna di queste m è tra y e b, si avrà $y \in M_2$. La reciproca si verifica in modo analogo, osservando che le uniche successioni compatibili con il fatto che m è tra x e b, e non tra y e b, sono precisamente le quattro di cui sopra.

Supponiamo, ora, che M'_1 e M'_2 siano pure sottoinsiemi di R nelle condizioni di M_1 e M_2. Prendiamo un punto x di M_1. Siccome $M'_1 \cup M'_2 = R - \{m\}$, x sarà in M'_1 o in M'_2. Supponiamo $x \in M'_1$. Allora, se per esempio $y \in M_1$ e $y \notin M'_1$, si avrà necessariamente $y \in M'_2$; quindi m sarebbe tra x e y, donde $y \in M_2$, ciò che è assurdo, poiché M_1 e M_2 non hanno punti in comune. Analogamente, se $y \in M'_1$, si avrà pure $y \in M_1$. Perciò $M'_1 = M_1$ e, di conseguenza $M'_2 = M_2$. Finalmente, supposto $x \in M_1 \cap M'_2$, si prova, in modo analogo, che $M_1 = M'_2$ e $M_2 = M'_1$. Il Teorema è dunque dimostrato.

Ognuno dei sottoinsiemi M_1 e M_2 di R, così determinati dal punto m, è ovviamente non vuoto, e si chiama *sezione* di R *determinata da* m (oppure *di origine* m). Cosicché ogni punto m di R determina due e soltanto due sezioni di R, di origine m (ciascuna di queste sezioni si dice *opposta* all'altra), È chiaro, perciò, che se b è un punto di R, distinto da m, esiste un'unica sezione di R, di origine m, alla quale b appartiene.

3. *Congruenza*. – Consideriamo ancora la relazione di *congruenza*, $\equiv$, fra i segmenti generici xy e zw di R (ove

$$xy \equiv zw$$

si legge «xy congruo a zw») che soddisfa agli assiomi:

III'–1. Dati i punti x, y di R, con $x \neq y$, si ha sempre $xy \equiv xy$; oltre ciò, essendo x' un punto qualsiasi di R, esiste, in ognuna delle sezioni di R, di origine x', un unico punto, y', tale che $xy \equiv x'y'$;

III'–2. Se xy, $x'y'$ e $x''y''$ sono segmenti di R tali che $x'y' \equiv xy$ e $x''y'' \equiv xy$, si avrà $x'y' \equiv x''y''$;

III'–3. Se x, y, z, x', y' e z' sono punti di R tali che y sia tra x e z, y' tra x' e z', ed ancora

$$xy \equiv x'y' \quad \text{e} \quad yz \equiv y'z',$$

si avrà $xz \equiv x'z'$.

Ciò posto, diremo che le relazioni η ed $\equiv$ definiscono *su* R una *struttura lineare*.

Definizione. – Chiameremo *retta* l'insieme R dotato di questa struttura lineare [3]. Le relazioni η e $\equiv$ sono rispettivamente l'*ordine originale* e la *congruenza della retta* R.

(3) Naturalmente, in mancanza di altri assiomi, questa «retta» è ben lungi da essere una retta nel senso abituale.

Semirette. Sia m un punto della retta R e consideriamo le due sezioni M_1 e M_2, di R, di origine m. Ponendo allora $A = M_1 \cup \{m\}$ e $B = M_2 \cup \{m\}$, ciascuno degl'insiemi A e B è ciò che si chiama *semiretta* di R, di *origine* m (ognuna si dice *opposta* all'altra). Un punto x di R si dice *interno* alla semiretta A (oppure B) se $x \in M_1$ (rispettivamente, $x \in M_2$); x si dice invece *esterno* ad A (oppure a B) se $x \notin A$ (rispettivamente, $x \notin B$).

Dati i punti x, y e x' della retta R, se y è tra x e x', ed ancora $xy \equiv xy'$, diremo che x ed x' sono simmetrici (ognuno *simmetrico* dell'altro) *rispetto ad* y. Risulta, dall'assioma III'–2, che dati due punti qualsiasi di R, x ed y, con $x \neq y$, esiste un unico punto x' di R che è simmetrico di x rispetto ad y.

In seguito ammetteremo tutte le conseguenze degli assiomi relativi all'ordine originale ed alla congruenza della retta R, menzionate in [1], aggiungendo, inoltre, anche la seguente, che sarà opportunamente usata:

TEOREMA 2. – *Se i punti* x, y, z, x', y' *e* z' *di* R *sono tali che* y *è tra* x *e* z, y' *tra* x' *e* z', *ed ancora*

$$xy \equiv x'y' \quad \text{e} \quad xz \equiv x'z',$$

si avrà $yz \equiv y'z'$.

Dimostrazione. – Si consideri nella sezione di origine y' alla quale z' appartiene, il punto z'' tale che $yz \equiv y'z''$ (assioma III'–1). Dall'assioma III'–3, $xz \equiv x'z''$. Ora, dalla simmetria e transitività della congruenza (che sono conseguenze degli assiomi III'–1, III'–2, III'–3) si ha: $x'z' \equiv x'z''$, dove, essendo z' e z'' della stessa sezione di origine x', si ha, da III'–1, che z' coincide con z''. Perciò, da $yz \equiv y'z''$ risulta, infine, $yz \equiv y'z'$.

Osservazione. – Se nel Teorema di cui sopra avessimo supposto $xy \equiv y'z'$ invece di $xy \equiv x'y'$, avremmo concluso che $yz \equiv x'y'$. Difatti, siccome $xz \equiv z'x'$ ed y è tra x e z, mentre y' è tra z' e x', allora, dal teorema dimostrato, si ha $yz \equiv y'x' \equiv x'y'$.

4. *Retta archimedea*. – Sia R una retta che soddisfa al seguente assioma:

V'–1 (*Assioma di Archimede*). – Dati i punti x, y e z di R, con y tra x e z, esiste un n–pla $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n > 2)$ di punti di R tali che:

$$x_1 = x\,,\ x_2 = y,$$

x_{i+1} è tra x_i e x_{i+2}, $x_i x_{i+1} \equiv x_{i+1} x_{i+2}$ $(1 \leq i < n - 1)$ e z è tra x e x_n (4).

5. *Sottorette*. – Siano R ed S due rette, con $R \subset S$, e supponiamo che l'ordine originale e la congruenza di R siano *indotte* rispettivamente dall'ordine originale e dalla congruenza di S (cioè, dati i punti x, y e z di R, x starà

(4) Quest'enunciato è, in sostanza, quello dell'assioma V, menzionato in [1], il quale è equivalente al V_1 di [2].

tra y e z nell'ordine originale di S; analogamente, dati i segmenti qualsiansi xy e zw di R, xy sarà congruo a zw nella congruenza di R quando e soltanto quando il segmento di estremi x ed y di S è congruo, nella congruenza di S, al segmento di estremi z e w di S). Diremo allora che R è una *sottoretta* di S.

Nota. – Essendo R una sottoretta della retta S, e xy un segmento di S, dove x e y sono punti di R, allora il segmento di R, con gli stessi estremi, sarà $xy \cap$ R. Per comodità useremo la stessa notazione, xy, per indicare il segmento di estremi x ed y, tanto di S come di R, poiché il lettore avrà sempre qualche indicazione per evitare ambiguità. Così, per esempio, essendo $\equiv$ ed $\doteq$ le congruenze di R e di S, rispettivamente, considerando i punti x , y , z e w di R ($x \neq y$, $z \neq w$), allora, quando si scrive

$$xy \equiv zw \qquad \text{oppure} \quad xy \doteq w,$$

si tratterà, naturalmente, nel primo caso, di segmenti di R, e, nel secondo, di segmenti di S.

6. *Insieme denso in una retta.* – Un insieme A di punti di una retta R si dice *denso in* R, *relativamente all'ordine originale di* R [5], se dati due punti distinti qualsiansi, x ed y, di R, esiste, in A, un punto tra x e y. Se A è una sottoretta di R, ed è un insieme denso in R, diremo, più semplicemente, che A è una sottoretta *densa in* R.

7. *Retta* H–*completa.* – Una retta archimedea R si dice H–*completa* (oppure *completa secondo* Hilbert) se soddisfa al seguente assioma:

(H). – Non esiste nessuna retta archimedea S $\neq$ R della quale R sia sottoretta. (Detto in altro modo: R non è sottoretta propria di un'altra retta archimedea).

8. *Ordine abituale compatibile con un ordine «tra».* – Fissiamo un ordine «tra» per l'*insieme* R e consideriamo, su R, una *relazione* di ordine nel senso abituale (cioè, una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva), che indicheremo con $\leq$). Diremo, allora, che l'ordine $\leq$ e l'ordine «tra» (ossia, l'ordine originale) per R, che abbiamo fissato, sono *compatibili* (ognuno *compatibile* con l'altro) se, per punti qualsiansi x, y e z di R, x è tra y e z (nell'ordine originale) quando e soltanto quando $y < x < z$ oppure $z < x < y$. È ovvio che se un ordine ω è compatibile con l'ordine originale sopradetto, allora ω è un *ordine totale* (cioè per qualsivogliano punti x e y di R si ha: $x\omega y$ oppure $y\omega x$); inoltre, l'ordine opposto ad ω sarà anche compatibile con quell'ordine originale. Inoltre si ha il seguente

TEOREMA. – *Dato un ordine originale* η *per l'insieme* R, *esistono due e soltanto due ordini* (abituali) *su* R, *uno opposto all'altro, compatibili con* η.

(5) Per comodità, sopprimeremo l'espressione «relativamente all'ordine originale di R», a meno che ciò possa dare luogo a confusione.

Dimostrazione. – Per provare l'esistenza, consideriamo, in R, due punti distinti o ed u. Dati, in R, i punti x ed y, porremo $x < y$, se e solo se:

1) $x = o$ oppure appartiene alla sezione di origine o che non contiene u, e y appartiene alla sezione di origine x che contiene u;

2) $x = u$ oppure appartiene alla sezione di origine u che non contiene o, ed y appartiene alla sezione di origine x che non contiene o.

Si verifica, allora, facilmente, considerando i diversi casi, che la relazione $x \leq y$ è un ordine totale su R, compatibile con l'ordine originale η, e succede lo stesso, perciò, con l'ordine opposto a $\leq$.

Proviamo, ora, che esistono solo due ordini totali, uno opposto all'altro. Siano, infatti, $\leq$ e $\preceq$ ordini su R compatibili con l'ordine originale η. Fissiamo, in R, due punti qualsiasi b e c con $b < c$, e supponiamo, in primo luogo, $b \prec c$. Prendiamo un punto qualsiasi x di R. Se $x < b$, allora b sarà tra x e c, poiché $b < c$; perciò, $x \prec b \prec c$ oppure $c \prec b \prec x$; siccome quest'ultimo caso non si verifica, si ha $x \prec b$. Se $b < x < c$, x sarà tra b e c, e quindi $b \prec x \prec c$ (poiché non può essere $c \prec x \prec b$); perciò, $b \prec x$. Finalmente, se $c < x$, allora c sarà tra b ed x; e come $b \prec c$, si avrà pure $c \prec x$, donde $b \prec x$. Riassumendo, per ogni x di R si ha $x \preceq b$ se e soltanto se $x \leq b$. Prendiamo, ora, in R, i punti x ed y in modo che x, y e b siano due a due distinti e supponiamo $x < y$. Se $y < b$, allora y sarà tra x e b, donde l'unica alternativa relativamente all'ordine $\preceq$ è $x \prec y \prec b$. Se $x < b < y$, allora potrà essere soltanto $x \prec b \prec y$, donde $x \prec y$. Finalmente, se $b < x$, x sarà tra b ed y, donde $b \prec x \prec y$ (poiché non si può avere $y \prec x \prec b$). Riassumendo, per punti x ed y qualsiansi di R, si avrà $x \leq y$ quando e soltanto quando $x \preceq y$, e perciò gli ordini $\leq$ e $\preceq$ coincidono.

Supponendo, invece, $c < b$, allora, essendo ω l'ordine opposto a $\leq$, si avrà $b \omega c$; quindi, siccome $b \neq c$, ne segue, dal risultato di cui sopra, che $\leq$ e ω coincidono. Il Teorema è così dimostrato.

Osservazione. – L'assioma V'–1 è equivalente a quest'altro (ove $\leq$ è un ordine compatibile con l'ordine originale di R):

V''–1. Dati, in R, i punti x, y, z, con $x < y < z$, esiste una n–pla $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n > 2)$ di punti di R tale che

$$x_1 = x \, , \, x_2 = y \, , \, x_{i+1} < x_{i+2} \, , \, x_i \, x_{i+1} \equiv x_{i+1} \, x_{i+2} \; (1 \leq i < n - 1) \text{ e } z < x_n \, .$$

Dimostriamo che V''–1 implica V'–1 (l'implicazione nel senso opposto è immediata). Supponiamo, infatti, y tra x e z nell'ordine originale di R. Ora, se $x < y < z$, non vi è nulla da provare. Se invece $z < y < x$, essendo $\preceq$ l'ordine opposto ad $\leq$, avremo $x \prec y \prec z$, donde basterà applicare V''–1 relativamente ad $\preceq$.

9. *Confronto di segmenti*. – Dati i segmenti ab e cd della retta R, diremo che ab è *minore* (strettamente) *di* cd, e scriveremo $ab < cd$ oppure $cd > ab$, se esiste un punto d' tra c e d tale che $ab = cd'$. Si vede facilmente che: *se i segmenti* ab, $a'b'$ *e* cd *di* R *sono tali che* $ab \equiv a'b'$ *oppure* $ab < a'b'$, *e* $a'b' < cd$, *allora* $ab < cd$. D'altra parte, *qualunque siano i segmenti non*

congrui ab *e* cd *di* R, *si ha sempre*: $ab < cd$ *oppure* $cd < ab$. Infatti, esiste, nella semiretta di origine c che contiene d, un punto d' tale che $ab \equiv cd'$. Dunque, se d' (che non può coincidere con d) si trova tra c e d, allora $ab < cd$; se, invece, d si trova tra c e d', allora $cd < ab$.

Finalmente, *dati i punti* a, b, c, a', b', c' *di* R, *con* b *tra* a *e* c, b' *tra* a' *e* c', *tali che* $ab \equiv a'b'$ *e* $bc < b'c'$, *allora si ha* $ac < a'c'$. Infatti, esiste, in R, un punto c'' tra b' e c' tale che $bc \equiv b'c''$. Perciò, siccome $ac \equiv a'c'$ (assioma III'–3) e c'' è tra a' e c', si ha $ac < a'c'$.

10. *Sottorette di una retta archimedea.* – Un risultato che può essere considerato come fondamentale in questo lavoro è quello espresso dal seguente

TEOREMA. – *Data una retta* S *ed una sua sottoretta* R, *affinché* S *sia archimedea è necessario e sufficiente che* R *sia archimedea e densa in* S.

Considereremo dapprima i due lemmi seguenti:

LEMMA 1. – *Se* R *è una sottoretta di una retta archimedea* S, *dato un punto qualsiasi* $m \in$ S *esistono, in* R, *due punti* x *ed* y *tali che* m *si trova tra* x *ed* y. *Inoltre*, R *è pure archimedea.*

Infatti, siano $\equiv$ ed $\doteqdot$ le congruenze di R ed S, rispettivamente, e consideriamo un ordine totale $\leq$ compatibile con l'ordine originale di S. È chiaro, allora, che l'ordine indotto da $\leq$ su R è pure compatibile con l'ordine originale di questa. Prendiamo, ora in R, i punti a e b, con $a < b$. Se m già si trova tra a e b, non vi è nulla da provare. In caso contrario, avremo le due alternative: $b < m$ oppure $m < a$. Ammettiamo la prima e consideriamo la n–pla $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n > 2)$ di punti di S tale che:

$$x_1 = a\,,\, x_2 = b\,,\, x_{i+1} < x_{i+2}\,,\, x_n\, x_{i+1} \doteqdot x_{i+1}\, x_{i+2}\ (1 \leq i < n - 1)\ e\ m < x_n\,.$$

Siccome $x_1, x_2 \in$ R, allora, dall'assioma III'–1 (per la congruenza $\equiv$) e dal fatto che R è sottoretta di S, ne segue che $x_i \in$ R per $i = 1, \cdots, n$; quindi, basterà prendere $x = a$ e $y = x_n$. Se invece $m < a$, essendo $(y_1, \cdots, y_n)$ $(n > 2)$ una n–pla di punti di S, con $y_1 = b$, $y_2 = a$, y_{i+1} tra y_i e y_{i+2}, $y_i\, y_{i+1} \doteqdot$ $\doteqdot y_{i+1}\, y_{i+2}$ $(1 \leq i < n - 1)$ e m tra y_n e b, avremo $y_n < m$, donde basterà prendere $x = y_n$ e $y = b$. Finalmente, dato che si può prendere m in R, risulta che questa è pure archimedea. Il Lemma 1 è così dimostrato.

LEMMA 2. – *Siano* R *una retta* (archimeda o no), $\leq$ *un ordine compatibile con l'ordine originale di* R, a *e* b *due punti di* R, *con* $a < b$. *Allora, per ogni intero* $n > 2$ *esiste una* n*–pla* $(x_1, \cdots, x_n)$ *di punti di* R *che soddisfa alle condizioni*

$$(\Upsilon)\ \begin{cases} a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b\,; \\ x_1\, x_2 \equiv x_2\, x_3 \equiv \cdots \equiv x_{n-1}\, x_n\,. \end{cases}$$

Invero, sia P la proprietà del numero naturale $n > 2$ secondo la quale esiste la n–pla nelle condizioni di cui sopra. Poniamo $x_1 = a$ e prendiamo, in R, i punti z e x_2 in modo che:

$$a < z < b\,,\, x_1 < x_2\,,\, x_1\, x_2 < az\ \text{e}\ x_1\, x_2 < zb.$$

(Come si vede facilmente, esistono, certamente, i punti z e x_2 nelle condizioni di cui sopra). Essendo, allora, x_3 il simmetrico di x_1 rispetto ad x_2, la terna (x_1, x_2, x_3) soddisfa alle condizioni (γ), e perciò, P è vera per $n = 3$. Supponiamo, ora, che, per il naturale $n > 2$ esista la n–pla $(x_1, \cdots, x_n)$ nelle condizioni (γ), e consideriamo i punti y_1, y_2, y_3 di R per i quali si abbia:

$$a = y_1 < y_2 < y_3 < x_2 \, , \, y_1 y_2 \equiv y_2 y_3$$

(ciò che è possibile visto che P è vera per $n = 3$). Possiamo allora formare la $(n + 1)$–pla $(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1})$ di punti di R, in cui ogni y_i è il simmetrico di y_{i-2} rispetto ad y_{i-1} $(i = 3, \cdots, n+1)$. Questa $(n+1)$–pla verifica, ovviamente:

$$a = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1} \quad \text{e} \quad y_1 y_2 \equiv y_2 y_3 \equiv \cdots \equiv y_n y_{n+1}.$$

Oltre ciò, si ha $y_{n+1} < x_n$, poiché al contrario, essendo p il più piccolo degli i per i quali $y_{i+1} \geq x_i$, si avrebbe $p > 2$, $y_{p+1} \geq x_p$ e $y_p < x_{p-1}$; e siccome $y_p y_{p+1} < x_{p-1} x_p$ (visto che

$$y_p y_{p+1} \equiv y_1 y_2 < x_1 x_2 \equiv x_{p-1} x_p),$$

risulterebbe l'assurdo $y_{p+1} < x_p$. Dunque, $y_{n+1} < x_n < b$, e perciò la P è vera per ogni naturale $n > 2$. Il Lemma 2 è così dimostrato.

Dimostrazione del Teorema. – Siano, come nel Lemma 1, $\equiv$ ed $\doteq$ le congruenze della retta S e della sottoretta R di S, rispettivamente, e $\leq$ un ordine totale compatibile con l'ordine originale di S. Supponiamo, allora, che S sia archimedea. Quindi, dal Lemma 1, R è pure archimedea. Fissiamo, ora, due punti qualsiasi, x ed y, di S, con $x < y$ e proviamo l'esistenza di almeno un punto di R tra x e y. A tale scopo prendiamo, in R, i punti a e b in modo che $a < x < b$ (ciò che è possibile in virtù del Lemma 1), e siano a_1 e a_2 due punti di S tali che

$$a_1 = a < a_2 < x \qquad \text{e} \qquad a_1 a_2 < xy.$$

Siccome S è archimedea, esistono, in questa, i punti $a_3, \cdots, a_n$ $(n > 2)$ tali che

$$a_{i+1} < a_{i+2} \, , \, a_i a_{i+1} \doteq a_{i+1} a_{i+2} \; (1 \leq i < n - 1) \quad \text{e} \quad b < a_n \, .$$

D'altra parte, essendo $(x_1, \cdots, x_n)$ una n–pla di punti di R che soddisfa alle condizioni (γ) del Lemma 2 (e perciò $x_1 = a$, $x_n < b$), si avrà certamente $x_2 < a_2$, poiché in caso contrario si avrebbe $x_n \geq a_n > b$. Tenendo conto del fatto che R è pure archimedea, esistono in questa i punti $x_{n+1}, \cdots, x_k$ $(k > n + 1)$, tali che

$$x_{i+1} < x_{i+2} \, , \, x_i x_{i+1} \equiv x_{i+1} x_{i+2} \; (1 \leq i < k - 1) \quad \text{e} \quad b < x_k \, .$$

Possiamo supporre $y < b$, visto che, se $b \leq y$, basterebbe prendere un punto c di R tra a e b, cosicché c si troverebbe tra x ed y; in questa ipotesi, avremo $y < x_k$. Essendo p il più piccolo degl'indici i tali che $x < x_i$, si avrà $p \geq 2$ e $x_{p-1} \leq x$. Allora, $x_p < y$, poiché in caso contrario, essendo

$$x_{p-1}\, x_p \equiv x_1\, x_2 < a_1\, a_2\,,$$

risulterebbe $xy < a_1\, a_2$, il che, data la scelta di a_2, non può avvenire. Dunque, $x < x_p < y$; siccome $x_p \in \mathrm{R}$, rimane dimostrata la condizione necessaria del Teorema.

Vediamo la condizione sufficiente. Siano x, y e z tre punti di S, con $x < y < z$, e consideriamo il simmetrico, y', di y rispetto ad z. Siccome R è, per ipotesi, un insieme denso in S, esistono, in R, i punti y_1, y_2 e w tali che

$$x < y_1 < y_2 < y < z < w < y'.$$

Inoltre, dall'ipotesi che R è archimedea, esistono, in questa, i punti $y_3, \cdots, y_n$ $(n > 2)$ per i quali si abbia:

$$y_{i+1} < y_{i+2}\,,\, y_i\, y_{i+1} \equiv y_{i+1}\, y_{i+2}\ (1 \leq i < n - 1)\ \text{e}\ w < y_n\,.$$

Consideriamo ora la n–pla $(x_1, \cdots, x_n)$ di punti di S, dove

$$x_1 = x\ ,\ x_2 = y\quad ,\quad x_{i+1} < x_{i+2}\quad ,\quad x_i\, x_{i+1} \doteq x_{i+1}\, x_{i+2}\,,$$

e dimostriamo che $z < x_n$. Ora, $y_n < x_n$, poiché al contrario, essendo p il più piccolo degli indici i tali che $x_i \leq y_i$, si avrebbe $p > 2$ e $y_{p-1} < x_{p-1}$; siccome $y_{p-1}\, y_p < x_{p-1}\, x_p$, risulterebbe la contraddizione $y_p < x_p$. Dunque, $y_n < x_n$, donde $z < x_n$, cioè, la retta S è archimedea. Il teorema è così dimostrato.

§ 2. – Sezioni di una retta. L'assioma (D), di Continuità, di Dedekind.

1. *Sezioni di una retta.* – Consideriamo una retta R e sia $\leq$ l'ordine (totale) compatibile con l'ordine originale di R. Possiamo, allora, introdurre, come d'abitudine, secondo l'ordine $\leq$, le nozioni di *maggiorante*, *minorante*, *massimo*, *minimo*, *estremo superiore*, *estremo inferiore*, ecc., di una parte A di R, e stabilire le proprietà relative a queste nozioni (per esempio, l'unicità dell'estremo superiore). Useremo, pure, l'espressione «x alla sinistra di y» (oppure «y alla destra di x») invece di $x \leq y$, aggiungendo l'avverbio «strettamente» se $x < y$.

Ciò posto, diremo che un sottoinsieme A di R è *sezione minorante* (o *sezione maggiorante*) di R se soddisfa alle tre condizioni:

1 *a*) $\varnothing \neq A \neq \mathrm{R}$;

2 *a*) A non possiede massimo (rispettivamente, minimo);

3 *a*) Se $x \in A$, allora, per ogni $y \in \mathrm{R}$ tale che $y < x$ (rispettivamente, $x < y$), si ha $y \in A$.

Un sottoinsieme di R che sia una sezione minorante oppure maggiorante di R si dice, semplicemente, una sezione di R.

È chiaro che ciascuna delle sezioni determinate da un punto di R (nel senso del n. 2 del § 1) è una sezione nel senso di cui sopra. (L'inversa di questa affermazione non si può assicurare a meno che sia ammesso l'*assioma della continuità*, il cui enunciato si trova nel n. seguente).

Le condizioni che sono servite per definire la sezione minorante (maggiorante) ci permettono di dimostrare le seguenti proprietà delle sezioni:

(P_1). – *Se* $\mathcal{F}$ *è una classe non vuota di sezioni minoranti* (*maggioranti*) *di* R, *tutte contenute in una stessa sezione minorante* (*maggiorante*) M *di* R, *la riunione delle sezioni appartenenti ad* $\mathcal{F}$ *è una sezione minorante* (*maggiorante*) *contenuta in* M.

(P_2). – *Dati i punti* x *ed* y *di* R, *sarà* $x \leq y$ *se e soltanto se la sezione minorante di* R *determinata da* x *è un sottoinsieme* (*proprio*, nel caso $x < y$) *della sezione minorante di* R *determinata da* y.

(P_3). – *Se* A *e* B *sono sezioni minoranti* (*maggioranti*) *di* R, *allora si ha, necessariamente*, $A \subset B$ *oppure* $B \subset A$.

(P_4). – *Se* R *è archimedea, data una sezione* A *di* R, *allora, per ogni* x *ed ogni* y *di* R, *con* $x \neq y$, *esistono, in* R, *due punti* x' *ed* y' *tali che* $x' \in A$, $y' \notin A$ *ed* $x'y' \equiv xy$.

Dimostriamo (P_4). Supponiamo che A sia una sezione minorante e prendiamo, in R, i punti x_1 e x_2 tali che $x_1 \in A$, $x_1 < x_2$ ed $x_1 x_2 \equiv xy$. Ora, se $x_2 \notin A$, non vi è nulla da provare. Supponiamo, allora, $x_2 \in A$ e prendiamo, in R, un punto $z \notin A$. Avremo, quindi, $x_1 < y_1 < z$; e siccome R è, per ipotesi, archimedea, esistono, in questa, i punti $x_3, \cdots, x_n$ $(n > 2)$ tali che

$$x_{i+1} < x_{i+2}\,,\; x_i\, x_{i+1} \equiv x_{i+1}\, x_{i+2}\; (1 \leq i < n-1) \quad \text{e} \quad z < x_n\,;$$

donde $x_n \notin A$. Essendo, ora, p il minore degl'indici i per i quali $x_i \notin A$, avremo $p > 2$ e $x_{p-1} \in A$. Dunque, siccome $x_p \notin A$ ed il segmento $x_{p-1}\, x_p$ è congruo ad xy (poiché è congruo ad $x_1 x_2$), basterà prendere $x' = x_{p-1}$ e $y' = x_p$. La proprietà (P_4) è così dimostrata.

2. *Assioma della continuità di Dedekind. Retta* D–*completa*. – Una retta R si dice D–*completa* (completa secondo Dedekind) se soddisfa al seguente assioma (*assioma di Dedekind*):

(D). – *Ogni sezione minorante di* R *ammette estremo superiore in* R.

Siccome il punto $x \in R$ è estremo superiore della sezione minorante A di R quando e soltanto quando A è l'insieme dei punti di R strettamente alla sinistra di x, l'assioma (D) può essere enunciato così:

Per ogni sezione minorante, A, *di* R, *esiste un punto* $x \in R$ *tale che* $A = \{ y \in R / y < x \}$.

(Diremo, allora, che la sezione minorante A *determina* il punto x di R).

Dimostreremo, ora, il seguente

TEOREMA. – *Una retta* R *è* D–*completa quando e soltanto quando ogni insieme* M *di punti di* R, *maggiorato* (rispettivamente, *minorato*) *e non vuoto ammette estremo superiore* (rispettivamente, *inferiore*) *in* R.

Difatti, sia A l'insieme dei punti di R (che supponiamo D–completa) strettamente inferiori a qualche punto dell'insieme (maggiorato e non vuoto) M. (In modo più preciso: A è l'insieme degli $z \in R$ per i quali esiste $y \in M$ tale che $z < y$). Siccome A è, ovviamente, una sezione minorante di R, esiste un $x \in R$ tale che $x = \sup(A)$ (estremo superiore di A). Dimostriamo che $x = \sup(M)$. In primo luogo, x è maggiorante di M, poiché se $y \in M$, non potrà essere $x < y$ (al contrario, x sarebbe massimo di A). D'altra parte, se x' è pure maggiorante di M, si avrà $x \leq x'$, poiché x' è, ovviamente, maggiorante di A. Si avrà, dunque, $x = \sup(M)$. La reciproca è conseguenza immediata del fatto che ogni sezione minorante è un insieme maggiorato e non vuoto. Il Teorema corrispondente, nel caso degl'insiemi minorati è conseguenza immediata del fatto che: essendo ω l'ordine opposto ad $\leq$, allora, un insieme non vuoto M, contenuto in R, è minorato (oppure il punto x di R è l'estremo inferiore di M) quando e soltanto quando M è maggiorato relativamente ad ω (rispettivamente, x è l'estremo superiore di M). Il Teorema è così dimostrato.

Osservazione. – Siccome i due unici ordini totali sulla retta R, compatibili con l'ordine originale di R, sono opposti (ognuno opposto all'altro), allora il teorema di cui sopra permette assicurare che: *il fatto che la retta* R *sia o no* D–*completa è indipendente dal particolare ordine totale* (compatibile con i sopradetto ordine originale) *che si adotta per formulare l'assioma* (D). Cosicché: *tale fatto dipende essenzialmente dall'ordine originale di* R.

§ 3. – COSTRUZIONE DI UNA RETTA D–COMPLETA AVENTE COME SOTTORETTA UNA DATA RETTA ARCHIMEDEA. EQUIVALENZA TRA GLI ASSIOMI (H) E (D), NELLE RETTE ARCHIMEDEE.

Sia R una retta archimedea e fissiamo, su R, un ordine, totale, $\leq$, compatibile con l'ordine originale di R. Poniamo, per ogni sezione minorante X di $R : \dot{X} = x$ se esiste il punto $x \in R$ per il quale $X = \{y \in R / y < x\}$; e $\dot{X} = X$ nel caso contrario. Se indichiamo con S l'insieme di tutti gli $\dot{X}$ quando X percorre tutte le sezioni di R, si avrà, allora, $R \subset S$. Ciò posto, stabiliremo, su S, una struttura lineare nel senso considerato nei numeri 1, 2 e 3 del § 1, definendo l'ordine originale e la congruenza come segue.

1. *Ordine originale.* – Dati gli elementi $\dot{X}$, $\dot{Y}$ e $\dot{Z}$ di S, poniamo

$$\dot{X}\dot{\eta}\,(\dot{Y}, \dot{Z})$$

se e soltanto se $\dot{X}$, $\dot{Y}$ e $\dot{Z}$ sono due a due distinti ed

$$Y \subset X \subset Z \quad \text{oppure} \quad Z \subset X \subset Y.$$

Si verifica, allora, che $\dot{\eta}$ soddisfa gli assiomi II′–1, ..., II′–4; inoltre, essendo η l'ordine originale di R, si ha, per qualsiasi x, y, z di R

$$x\eta\,(y, z) \text{ quando e soltanto quando } x\dot{\eta}\,(y, z).$$

Ponendo, ora, per gli elementi $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ di S,

$$\dot{X}\omega\dot{Y} \text{ se e soltanto se } X \subset Y,$$

si vede che ω è un ordine totale su S, compatibile con η; inoltre, ω induce l'ordine $\leq$ su R, e perciò useremo d'ora in avanti la notazione stessa, $\leq$, invece di ω, scrivendo senz'altro

$$\dot{X} \leq \dot{Y}$$

per esprimere che $\dot{X}\omega\dot{Y}$.

2. *Congruenza*. – Dati gli elementi (o punti) $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ e $\dot{W}$ di S, con $\dot{X} < \dot{Y}$ ed $\dot{Z} < \dot{W}$, porremo, per i segmenti $\dot{X}\dot{Y}$ e $\dot{Z}\dot{W}$ di S (§ 1, n. 2):

$$\dot{X}\dot{Y} \doteq \dot{Z}\dot{W}$$

se e soltanto se: ogni segmento di R contenuto in $Y - X$ è congruo (naturalmente nella congruenza di R) a qualche segmento di R contenuto in $W - Z$, ed inversamente, ogni segmento di R contenuto in $W - Z$ è congruo a a qualche segmento di R contenuto in $Y - X$.

È ovvio che *la relazione binaria* $\doteq$, *tra i segmenti di* S, *è riflessiva, simmetrica e transitiva*; *sicché l'assioma* III′–2 delle *congruenze* (§ 1, n. 3) *è soddisfatto da* $\doteq$. Inoltre si ha il

TEOREMA 1. – *Se* x, y, z *e* w *sono punti di* R, *con* $x \neq y$ *e* $z \neq w$, *allora* $xy \equiv zw$ *quando e soltanto quando* $xy \doteq zw$.

Dimostrazione. – Infatti, supponiamo, per esempio, $x < y$ e $z < w$ e siano X, Y, Z e W le sezioni minoranti di R aventi per origini rispettivamente i punti x, y, z e w (allora si ha, per definizione, $x = \dot{X}$, $y = \dot{Y}$, $z = \dot{Z}$ e $w = \dot{W}$). Prendiamo, in $Y - X$, i punti qualsiansi u e v, con $u < v$ (quindi si avrà $x \leq u < v < y$). Ora, esiste un punto $v' \in R$ tale che $z < v'$ e $uv \equiv zv'$; oltre ciò, v' appartiene a $W - Z$ poiché $z \in W$, $z \notin Z$ e $z < v' < w$ (§ 1, n. 9). Dunque, uv è congruo al segmento zv' contenuto in $W - Z$. Analogamente, ogni segmento di R, contenuto in $W - Z$, è congruo ad un segmento di R, contenuto in $Y - X$. Dunque, $xy \doteq zw$.

Inversamente, supponiamo $xy \doteq zw$. Allora, non potrà essere $xy < zw$ poiché, altrimenti, esisterebbe $y' \in R$, con $z < y' < w$ (e quindi $y' \in W - Z$) tale che $xy \equiv xy'$. Ora, essendo y'' un punto di R tra y' e w, il segmento zy'' di R dovrebbe essere congruo ad un segmento di R contenuto in $Y - X$; ma questo è assurdo, una volta che $xy < zy''$ e che ogni segmento di R contenuto in $Y - X$ è, certamente, minore di xy. Analogamente, non può essere $zw < xy$. Perciò, $xy \equiv zw$, ed il Teorema è così dimostrato.

Per concludere che $\doteq$ è effettivamente una congruenza tra i segmenti di S basterà, dunque, provare i due teoremi seguenti:

TEOREMA 2. – *La relazione* $\doteq$ *soddisfa l'assioma* III′–1.

Dimostrazione. – Siano $\dot{X}$, $\dot{Y}$ ed $\dot{X}'$ punti qualunque di S, con $\dot{X} < \dot{Y}$, e denotiamo con Y' l'insieme dei $t \in R$ per i quali esiste un $u \in X'$ tale che il segmento ut di R sia congruo a qualche segmento di R contenuto in $Y - X$. Allora si vede facilmente che Y' è una sezione minorante di R; inoltre, dalla proprietà (P_4) (n. 1, § 2) per la sezione X′, ne segue che questa è contenuta propriamente in Y′. Ciò posto, dimostriamo che

$$\dot{X}'\,\dot{Y}' \doteq \dot{X}\dot{Y}.$$

Infatti, siano x e y, con $x < y$, due punti qualsiasi di $Y - X$ e prendiamo un punto $z \in Y$ strettamente alla destra di y. In virtù della (P_4) esistono i punti $z' \in X'$ e $y' \in R - X'$ tali che $yz \equiv z'\,y'$; oltre ciò (assioma III′-1) esiste, in R, il punto x' strettamente alla destra di y', tale che $xy \equiv y'\,x'$ donde, per III′-3, $z'\,x' \equiv xz$. Dunque, $x'\,, y' \in Y' - X'$ e, pel Teorema 2 del n. 3 del § 1, il segmento xy di R, contenuto in $Y - X$, è congruo al segmento $y'\,x'$ (o $x'\,y'$) di R, contenuto in $Y' - X'$. Inversamente, siano x' e y', con $x' < y'$, due punti qualunque di $Y' - X'$ e prendiamo $z' \in X'\,, z\,, y \in Y - X$, con $z < y$, tali che $zy \equiv z'y'$. Allora, essendo x il punto di R tale che $z < x < y$ e $zx \equiv z'x'$, avremo $x'y' = xy$. Pertanto, $\dot{X}'\,\dot{Y}' \doteq \dot{X}\dot{Y}$.

Vediamo ora l'unicità del punto $\dot{Y}'$ (alla destra di $\dot{X}'$), nella condizione di cui sopra. Supponiamo per assurdo che $\dot{Z}'$ sia un altro punto di S, per esempio, $\dot{Y}' < \dot{Z}'$, nella stessa condizione. Prendiamo i punti y' e $z'\,, y' < x'$, di $Z' - Y'$, in modo tale che il segmento $y'z'$ di R sia congruo ad un segmento di R contenuto in $Y' - X'$ (ciò che è possibile, poiché si avrà pure $\dot{X}'\,\dot{Y}' \doteq \doteq \dot{X}'\,\dot{Z}'$). Essendo, allora, x' ed v' due punti, rispettivamente di X′ ed $R - Y'$, che verificano $x'v' \equiv y'z'$ (proprietà (P_4) delle sezioni), il segmento $v'z'$ di R (che è congruo ad $x'y'$) sarebbe contenuto in $Z' - X'$ e non sarebbe congruo a nessun segmento di R contenuto in $Y' - X'$, ciò che è assurdo. Pertanto dobbiamo avere $\dot{Z}' = \dot{Y}'$.

Finalmente, essendo Y″ l'insieme dei $t \in X'$ per i quali esiste $u \in X'$, con $t < u$, in modo che il segmento tu di R sia maggiore di *ogni* segmento di R contenuto in $Y - X$, si vede facilmente che Y″ è una sezione di R contenuta propriamente in X′. Inoltre si ha pure

$$\dot{Y}''\,\dot{X}' \doteq \dot{X}\dot{Y}.$$

Infatti, siano x e y, $x < y$, due punti qualsiansi di $Y - X$ e prendiamo $z \in Y$ strettamente alla destra di y. Ora, in virtù della (P_4), si possono scegliere $z' \in Y''$ ed $y' \in R - Y''$ tali che $z'y' \equiv yz$; e siccome esiste un $u \in X'$, alla destra di z', in modo che $z'u > xz$, ne segue che il punto $x' \in R$, alla destra di z', tale che $z'x' \equiv xz$, appartiene ad $X' - Y''$. Cosicché, il segmento xy di R è congruo al segmento $x'\,y'$ di R, contenuto in $X' - Y'$. Inoltre siccome, dalla costruzione di Y″, nessun segmento di R, contenuto in $X' - Y''$, può essere maggiore di ogni segmento di R contenuto in $Y - X$, ne segue che $\dot{Y}''\,\dot{X}' \doteq \dot{X}\dot{Y}$. L'unicità di $\dot{Y}''$ si dimostra come nel caso del punto $\dot{Y}'$. Il Teorema 2 è così dimostrato.

TEOREMA 3. – *La relazione* $\doteq$ *soddisfa l'assioma* III′-3.

Dimostrazione. – Siano $\dot{X}\,, \dot{Y}\,, \dot{Z}\,, \dot{X}', \dot{Y}'$ e $\dot{Z}'$, punti di S, con $\dot{X} < \dot{Y} < \dot{Z}\,, \dot{X}' < \dot{Y}' < \dot{Z}'$, tali che

$$\dot{X}\dot{Y} \doteq \dot{X}'\,\dot{Y}' \quad \text{e} \quad \dot{Y}\dot{Z} \doteq \dot{Y}'\,\dot{Z}'.$$

Ciò posto, dimostriamo che $\dot{X}\dot{Z} \doteq \dot{X}'\dot{Z}'$. Infatti, siano x e y, con $x < y$, due punti qualunque di $Z - X$. È chiaro, dapprima, che se $xy \subset Y - X$ (o $xy \subset Z - Y$), allora il segmento xy di R, che è contenuto in $Z - X$, sarà congruo ad un segmento di R contenuto in $Y - X$ (rispettivamente, in $Z - Y$) e quindi contenuto in $Z - X$. Supponiamo allora $x \in Y - X$ ed $y \in Z - Y$. Ora, si possono scegliere, come si vede facilmente, i punti $x_1 , x_2 \in Y - X , y_1 , y_2 \in Z - Y$, in modo tale che

$$x < x_1 < x_2 \, , \, y < y_1 < y_2 \, , \, xx_1 \equiv x_1 x_2 \equiv yy_1 \equiv y_1 y_2 \, .$$

Siccome $\dot{X}\dot{Y} \doteq \dot{X}'\dot{Y}'$, il segmento xu di R (che è contenuto in $Y - X$) è congruo ad un segmento $x'u'$ di R ($x' < u'$) contenuto in $Y' - X'$; e pel III′–1 esiste $y'_1 \in$ R, strettamente alla destra di u' tale che $u'y'_1 \equiv uy_1$, donde, pel II′–3, il segmento xy_1 di R (che è contenuto in $Z - X$) è congruo al segmento $x'y'_1$ di R. Ma

$$uy_1 \equiv vy_2 \subset Z - Y,$$

e perciò $u'y'_1$ è congruo ad un segmento $u''y''_1$ di R ($u'' < y''_1$) contenuto in $Z' - Y'$; e siccome si ha, ovviamente, $y'_1 < y''_1$ e $xy < xy_1$, ne segue che il segmento xy è congruo ad un segmento di R contenuto in $Z' - X'$. In modo analogo si dimostra che ogni segmento di R contenuto in $Z' - X'$ è congruo a qualche segmento di R contenuto in $Z - X$; e quindi $\dot{X}\dot{Z} \doteq \dot{X}'\dot{Z}'$. La dimostrazione nel caso in cui $\dot{Z}' < \dot{Y}' < \dot{X}'$ (mentre $\dot{X} < \dot{Y} < \dot{Z}$) è del tutto analoga. Il Teorema 3 è così dimostrato.

3. *La retta* S *come retta archimedea* D*–completa, della quale* R *è sottoretta.* – In virtù dei risultati precedenti, si può, ora, affermare che le relazioni $\dot{\eta}$ e $\doteq$ definiscono su S una struttura lineare nel senso del n. 3 del § 1. E più ancora, la retta S, che si ottiene dotando l'insieme S di questa struttura, ammette la R come sottoretta. Inoltre S è archimedea. Difatti, R è densa in S poiché se $\dot{X} , \dot{Y} \in S , \dot{X} < \dot{Y}$, allora presi i punti $v , z \in Y - X$, con $v < z$ (che esistono certamente), ed essendo Z la sezione minorante di R d'origine z, si avrà $\dot{X} < \dot{Z} < \dot{Y}$, cioè: $z \, \dot{\eta} \, (\dot{X} , \dot{Y})$. Di conseguenza, siccome R è, per ipotesi, archimedea, ne segue, dal Teorema del n. 10 del § 1, che S è pure archimedea.

Finalmente, la *retta* S *è* D*–completa*. Infatti, dato un insieme L di punti di S, maggiorato e non vuoto, la riunione M delle sezioni X di R tali che $\dot{X} \in L$ è una sezione minorante di R (proprietà (P_1) delle sezioni); ed $\dot{M}$ è, ovviamente, l'estremo superiore di L in S.

La retta S sarà detta la D*–completata di* R.

4. *Equivalenza tra gli assiomi* (H) *e* (D) *nelle rette archimedee.* – Siamo ora in grado di dimostrare l'equivalenza alla quale ci siamo riferiti nel principio di questo lavoro; cioè, di stabilire il seguente

TEOREMA. – *Affinché una retta archimedea sia* D*–completa è necessario e sufficiente che la stessa sia* H*–completa.*

Dimostrazione. – Sia R una retta archimedea. Se R è D–completa, allora, essendo S una retta archimedea qualsiasi, della quale R è una sottoretta, si avrà necessariamente S = R. Infatti, prendiamo un punto qualunque $x \in S$ e consideriamo l'insieme M dei punti di R strettamente alla sinistra di x, nell'ordine totale $\leq$ su S compatibile con l'ordine originale di S. L'insieme M è ovviamente una sezione minorante di R, e perciò ammette uno estremo superiore y in R. Proviamo che $y = x$. Ora, non può essere $y < x$ poiché, in caso contrario, siccome R è densa in S (Teorema del n. 10 del § 1), si potrebbe prendere $z \in R$ tale che $y < z < x$, ciò che è assurdo. D'altra parte, non si può avere pure $x < y$, poiché in questo caso esisterebbe, nello stesso modo, un punto $t \in R$, con $x < t < y$, ciò che è pure assurdo, visto che $t \in M$. Siccome x è un punto quasiasi di S e $R \subset S$, allora R = S e perciò R è H–completa.

Supponiamo, ora, che la retta archimedea R sia H–completa e consideriamo la retta S, D–completata di R. Siccome R è sottoretta di S e questa è archimedea, allora la R coincide con S, e pertanto è D–completa. Il Teorema è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, « Achte Auflage », B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1956.

[2] D. HILBERT, *Foundations of Geometry*, « Third edition », The Open Court Publishing Company, Illinois 1938.

[3] PAUL BERNAYS e ABRAHAM A. FRAENKEL, *Axiomatic Set Theory*, North Holland Publishing Co. 1958.