ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI

Esistenza di strategie ottimali per i sistemi di controllo con parametri distribuiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 243–251.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_243_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Teoria dei controlli. — *Esistenza di strategie ottimali per i sistemi di controllo con parametri distribuiti.* Nota di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELÌ (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In this paper we investigate the existence of an optimal policy for a well-posed linear distributed parameter control system whose states are described by scalar-valued functions.

I. – DESCRIZIONE DEL SISTEMA.

Sia S un ben posto sistema di controllo lineare con parametri distribuiti con un dominio spaziale fissato $\Omega\,(\subset E^n)$ limitato da una superficie nitida $\partial\Omega$ soddisfacente le ben note condizioni di Liapunov. Siano $I_0 = [t_0 - \alpha , t_0]$ $(\alpha \geq 0)$ l'*intervallo iniziale* e $I_1 = (t_0 , t_1)$ l'*intervallo temporale processuale* spettanti al sistema S. Denotiamo con $I_2 = I_0 \cup I_1$ ed assumiamo che I_2 sia compatto.

Siano U, Φ, V, W e $P\,(\equiv \Phi \times V \times W)$, rispettivamente, lo *spazio funzionale spettante allo stato del sistema*, lo spazio di tutti gli *stati iniziali ammissibili* φ, lo spazio di tutti i *controlli distribuiti ammissibili* v, lo spazio di tutti i *controlli al contorno ammissibili* w e lo *spazio strategico*. Assumiamo che certe metriche siano già introdotte in tali spazi.

Si consideri il sistema S descritto da un'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A(u)(t,x) + B(v)(t,x), \tag{1.1}$$

per $v \in V$ e $(t,x) \in I_1 \times \Omega$, soggetto alla condizione iniziale

$$u(t,x) = \varphi(t,x) \qquad \text{per} \quad (t,x) \in I_0 \times \overline{\Omega} \quad , \quad \varphi \in \Phi, \tag{1.2}$$

ed alla condizione al contorno

$$u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = w(t,x) \qquad \text{per} \quad (t,x) \in I_1 \times \partial\Omega \quad , \quad w \in W. \tag{1.3}$$

Nell'equazione (1.1), A denota un operatore lineare chiuso agente sullo spazio U non involgente differenziazione rispetto a t, B è un operatore continuo agente sullo spazio V ed $x = (x_1 , x_2 , \cdots , x_n)$. Assumiamo che il problema misto di cui sopra è ben posto (1).

Scriviamo per semplicità

$$p = \{\varphi , v , w\} \quad , \quad P = \{p \mid p \text{ ammissibile}\}, \tag{1.4}$$

(*) Department of Mathematics, The University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1968.
(1) Per la terminologia ed i risultati concernenti l'equazione (1.1) vedasi [3 b].

e denotiamo con $u(t, x; p)$ la traiettoria del sistema S corrispondente alla strategia $p \in \mathrm{P}$. Ricordiamo che, dato il fatto che il sistema è ben posto, le traiettorie $u(t, x; p)$ di S dipendono continuamente dalle strategie $p \in \mathrm{P}$.

Si osservi che ove l'intervallo iniziale temporale I_0 si riduce all'istante iniziale t_0, ogni integrazione spettante all'intervallo I_0 dev'essere abolita, eseguendosi ovvia modificazione nell'integrando. In questo caso possiamo scrivere $\varphi(x) = \varphi(t_0, x)$. Ed ove si tratti di un problema astratto di Cauchy, non ne abbiamo bisogno durante il processo di condizioni al contorno.

Assumiamo inoltre che la *performanza* del sistema S sottoposto alla strategia $p \in \mathrm{P}$ si misuri tramite il *funzionale costo* della forma

$$
\begin{aligned}
(1.5) \qquad \mathrm{J}(t_1; p) = & \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{Q}_1(\tau; u(\tau, x_1), v(\tau, x_2), w(\tau, x_3))\, d\tau \\
& + \int_{\partial\Omega} \mathrm{Q}_2(t_1, \xi, \nabla_\xi u(t_1, \xi), w(t_1, \xi))\, d\mathrm{S}_\xi \\
& + \int_{\Omega} \mathrm{Q}_3(t_1, \xi; u(t_1, \xi), \nabla_\xi u(t_1, \xi), v(t_1, \xi))\, d\mathrm{V}_\xi \\
& + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega} \mathrm{Q}_4(\tau, \xi; \nabla_\xi u(\tau, \xi), w(\tau, \xi))\, d\mathrm{S}_\xi\, d\tau \\
& + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} \mathrm{Q}_5(\tau, \xi; u(\tau, \xi), \nabla_\xi u(\tau, \xi), v(\tau, \xi))\, d\mathrm{V}_\xi\, d\tau ,
\end{aligned}
$$

ove $u(t, x) \equiv u(t, x; p)$, $x_1, x_2 \in \Omega$ e $x_3 \in \partial\Omega$ sono certi punti fissi dati e Q_k $(k = 1, 2, \cdots, 5)$ sono funzioni non negative con valori scalari, continue rispetto a tutti i loro argomenti, $d\mathrm{V}_\xi$ e $d\mathrm{S}_\xi$ sono, rispettivamente, gli elementi di volume e di superficie e $\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Assumiamo che Q_2 e Q_3 si annullino per $t_1 \downarrow t_0$. Si ha, per conseguenza,

$$
(1.6) \qquad \lim_{t_1 \downarrow t_0} \mathrm{J}(t_1; p) = 0.
$$

Si tenga presente il fatto che il funzionale costo $\mathrm{J}(t_1; p)$ dipende continuamente da t_1 e p.

Assumiamo finalmente che il sistema di controllo S è soggetto alla costrizione avente la forma

$$
(1.7) \qquad \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} \chi(\tau, \xi; u(\tau, \xi), v(\tau, \xi))\, d\mathrm{V}_\xi\, d\tau \subseteq \mathrm{E},
$$

ove $u(t, x) = u(t, x; p)$, $v(t, x) \in \mathrm{V}$, E è un insieme compatto dato in E^1, mentre χ è una funzione od un funzionale dato continuo nei suoi argomenti.

È chiaro che il primo membro di (1.7) dipende continuamente da p e t_1.

Il nostro problema di ottimizzazione consiste nella determinazione di una strategia ammissibile con costo minimo soddisfacente la costrizione (1.7).

II. – INSIEME RAGGIUNGIBILE.

Sia S un sistema lineare di controllo descritto nel paragrafo precedente. Sia $\mathrm{J}(t\,;p)$ il funzionale costo definito tramite l'equazione (1.5), ove invece di t_1 si è posto $t \in \mathrm{I}_1$. Poniamo inoltre, per $t \in \mathrm{I}_1$,

$$\mathrm{X}(t\,;p) = \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} \chi(\tau\,,\xi\,;u(\tau\,,\xi)\,,v(\tau\,,\xi))\,d\mathrm{V}_\xi\,d\tau\,, \tag{2.1}$$

ove $u(t,x) \equiv u(t,x\,;p)\,,\,p = \{\varphi\,,v\,,w\}$, mentre χ è l'integrando che figura nella (1.7).

È chiaro che i funzionali $\mathrm{J}(t\,;p)$ e $\mathrm{X}(t\,;p)$ dipendono continuamente da t e p e per ogni $p \in \mathrm{P}$ si ha $\mathrm{J}(t_0\,;p) = \mathrm{X}(t_0\,;p) = 0$.

Sia t_0 l'istante iniziale fissato. Definiamo tramite

$$\boldsymbol{u} = (t\,,\mathrm{J}\,,\mathrm{X}\,,u) \tag{2.2}$$

lo *stato esteso* del sistema S nel momento t, ove si è posto $\mathrm{J} = \mathrm{J}(t\,;p)$, $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t\,;p)\,,\,u = u(t\,,x\,;p)$. Diremo che

$$\boldsymbol{\varphi} = (t_0\,,0\,,0\,,\varphi) \tag{2.3}$$

è lo *stato esteso iniziale*.

DEFINIZIONE 1. Lo stato esteso $\boldsymbol{u}^* = (t^*, \mathrm{J}^*, \mathrm{X}^*, u^*)$ si dice *raggiungibile* dal sistema S se esiste una strategia ammissibile $p^* \in \mathrm{P}$ che faccia trasferire lo stato iniziale esteso $\boldsymbol{\varphi}^* = (t_0\,,0\,,0\,,\varphi)$ nello stato esteso u^*, è cioè:

$$t^* \in \mathrm{I}_1\,,\ \mathrm{J}^* = \mathrm{J}(t^*\,;p^*)\quad,\quad \mathrm{X}^* = \mathrm{X}(t^*\,;p^*)\quad,\quad u^* = u(t^*, x\,;p^*) \tag{2.4}$$

per $x \in \overline{\Omega}$.

DEFINIZIONE 2. Sia $\mathrm{I} = [\tau_1\,,\tau_2] \subset \mathrm{I}_1$ un dato intervallo temporale. Diremo allora che l'insieme

$$\mathrm{A_I} = \{(t\,,\mathrm{J}\,,\mathrm{X}\,,u) \mid t \in \mathrm{I}\,,(t\,,\mathrm{J}\,,\mathrm{X}\,,u)\ \text{raggiungibile}\} \tag{2.5}$$

è l'*insieme raggiungibile* del sistema S nell'intervallo di tempo I.

Denoteremo con $\mathbf{U}$ e $\boldsymbol{\Phi}$, rispettivamente, gli spazi delle totalità di stati estesi e di stati iniziali estesi. È chiaro che un medesimo stato esteso può corrispondere a varie strategie.

Introduciamo nello spazio $\mathbf{U}$, per misurare la distanza tra due punti qualunque, diciamone $\boldsymbol{u} = (t\,,\mathrm{J}\,,\mathrm{X}\,,u)$ e $\boldsymbol{u}^* = (t^*, \mathrm{J}^*, \mathrm{X}^*, u^*)$, la seguente metrica:

$$(2.6)\qquad |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*| = \operatorname*{Sup}_{x\in\bar\Omega}\{|t-t^*|\,,|\mathrm{J}-\mathrm{J}^*|\,,|\mathrm{X}-\mathrm{X}^*|\,,|u-u^*|\};$$

e definiamo la distanza tra due stati iniziali estesi φ e φ^* tramite

$$(2.7)\qquad |\varphi-\varphi^*| = \operatorname*{Sup}_{(t,x)\in \mathrm{I}_0\times\bar\Omega}|\varphi(t,x)-\varphi^*(t,x)|\,.$$

III. – Compattezza dell'insieme raggiungibile.

In questo paragrafo studieremo la compattezza dell'insieme $\mathrm{A_I}$ raggiungibile dal sistema S durante l'intervallo di tempo I.

Teorema 1. *Sia* S *un ben posto sistema lineare di controllo con parametri distribuiti descritto nel paragrafo* I. *Sia* $\mathrm{I}=[\tau_1\,,\tau_2]\subseteq \mathrm{I}_1$ *un intervallo di tempo compatto dato. Assumiamo che*

(a) *Lo spazio strategico* P *è chiuso e convesso, contenente* $\{0\,,0\,,0\}$ *come un suo punto interno*;

(b) *Gli insiemi*

$$(3.1)\qquad \mathrm{J}(t\,;\mathrm{P})=\{\mathrm{J}(t\,;p)\,|\,p\in\mathrm{P}\}\quad,\quad \mathrm{X}(t\,;\mathrm{P})=\{\mathrm{X}(t\,;p)\,|\,p\in\mathrm{P}\}$$

sono chiusi e convessi per ogni fissato $t\in\mathrm{I}_1$,

(c) *Esistono funzioni non negative* $m_i(t)$ *integrabili nel senso di Lebesgue su* I_1, $i=1\,,2\,,3$ *tali che, per* $t\in\mathrm{I}_1$, *si abbia uniformemente per tutti i* $p\in\mathrm{P}$ *ed* $x\in\bar\Omega$

$$(3.2)\qquad \left|\frac{d\mathrm{J}(t\,;p)}{dt}\right|\le m_1(t)\quad,\quad \left|\frac{d\mathrm{X}(t\,,p)}{dt}\right|\le m_2(t)\quad,\quad \left|\frac{\partial u(t\,,x\,;p)}{\partial t}\right|\le m_3(t).$$

Allora, l'insieme $\mathrm{A_I}$ *raggiungibile dal sistema* S *nell'intervallo di tempo* I *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{u}^k=(t^k,\mathrm{J}^k,\mathrm{X}^k,u^k)$ $(k=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ una sucessione di punti appartenenti all'insieme $\mathrm{A_I}$. Abbiamo da dimostrare che si può scegliere dalla successione data $\{\boldsymbol{u}^k\}$ una sottosuccessione $\{\boldsymbol{u}^{k_i}\}$ $(i=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ convergente nello spazio $\mathbf{U}$ verso un punto $\boldsymbol{u}^0=(t^0,\mathrm{J}^0,\mathrm{X}^0,u^0)\in\mathrm{A_I}$.

Ora, giacché, per ogni k, $\boldsymbol{u}^k\in\mathrm{A_I}$, risulta l'esistenza di una strategia ammissibile $p^k=\{\varphi^k,v^k,w^k\}$ tale che si abbia

$$(3.3)\qquad \mathrm{J}^k=\mathrm{J}(t^k\,;p^k)\quad,\quad \mathrm{X}^k=\mathrm{X}(t^k,p^k)\quad,\quad u^k=u(t^k,x\,;p^k)\qquad (x\in\bar\Omega)$$

similarmente, dal fatto che $\boldsymbol{u}^0\in\mathrm{A_I}$, se ne deduce l'esistenza di una strategia ammissibile $p^0=\{\varphi^0,v^0,w^0\}$ tale che si abbia

$$(3.4)\qquad \mathrm{J}^0=\mathrm{J}(t^0\,;p^0)\quad,\quad \mathrm{X}^0=\mathrm{X}(t^0\,;p^0)\quad,\quad u^0=u(t^0,x\,;p^0)\qquad (x\in\bar\Omega).$$

Tenendo conto della definizione (2.6) della metrica introdotta nello spazio **U** si ha simultaneamente non appena sia $\boldsymbol{u}^{k_i} \to \boldsymbol{u}^0$

$$t^{k_i} \to t^0 \quad , \quad \mathrm{J}^{k_i} \to \mathrm{J}^0 \quad , \quad \mathrm{X}^{k_i} \to \mathrm{X}^0 \quad , \quad u^{k_i} \to u^0 \qquad \text{per} \quad i \to \infty, \tag{3.5}$$

l'ultimo limite convergendo uniformemente rispetto ad $x \in \overline{\Omega}$.

Giacché, in virtù dell'ipotesi (c), le funzioni $m_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ sono non negative ed integrabili nel senso di Lebesgue sull'intervallo I_1, le funzioni

$$\mathrm{M}_i(t) = \int_{t_0}^{t_1} m_i(\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

sono assolutamente continue e non decrescenti su I_1 e si ha inoltre

$$\mathrm{M}_i = \mathrm{M}_i(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} m_i(\tau)\, d\tau < \infty \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.7}$$

Consideriamo la successione di numeri $\{t^k\}$. Giacché $t^k \in \mathrm{I}$ per ogni $k = 1, 2, 3, \cdots$ ed I è compatto, il limite

$$\lim_{k \to \infty} t^k = t^0 \tag{3.8}$$

esiste e $t^0 \in \mathrm{I}$. Cambiamo gli indici k in modo che si abbia

$$t^k \downarrow t^0 \qquad \text{per} \quad k \to \infty. \tag{3.9}$$

Consideriamo adesso la successione di funzioni continue $\{\mathrm{J}(t; p^k)\}$. In virtù della prima delle ineguaglianze (3.2) e per (3.6) e (3.7), possiamo scrivere, per $t \in \mathrm{I}_1$,

$$|\mathrm{J}(t; p^k)| = \left| \int_{t_0}^{t} d\mathrm{J}(\tau; p^k) \right| \leq \int_{t_0}^{t} m_1(\tau)\, d\tau = \mathrm{M}_1(t) \leq \mathrm{M}_1. \tag{3.10}$$

E pertanto, la successione $\{\mathrm{J}(t; p^k)\}$ è uniformemente limitata sull'intervallo I_1. Facendo uso della seconda e della terza delle ineguaglianze (3.2) si può dimostrare in modo affatto simile che le successioni di funzioni continue $\{\mathrm{X}(t; p^k)\}$ e $\{u(t, x; p^k)\}$ sono pur esse, rispettivamente, uniformemente limitate su I_1 ed $\mathrm{I}_1 \times \overline{\Omega}$. Si ha inoltre, per $t, t^* \in \mathrm{I}_1$,

$$|\mathrm{J}(t; p^k) - \mathrm{J}(t^*; p^k)| = \left| \int_{t^*}^{t} d\mathrm{J}(\tau, p^k) \right| \leq \left| \int_{t^*}^{t} m_1(\tau)\, d\tau \right| \leq$$
$$\leq |\mathrm{M}(t) - \mathrm{M}(t^*)|. \tag{3.11}$$

Giacché le funzioni $\mathrm{M}_i(t)$ sono assolutamente continue su I_1, esse sono ivi uniformemente continue. Epperciò, per ogni $\varepsilon > 0$ dato, si può trovare un

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tale che si abbia

$$(3.12) \qquad |J(t; p^k) - J(t^*; p^k)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad |t - t^*| < \delta, \qquad t, t^* \in I_1.$$

Per conseguenza, la successione $\{J(t; p^k)\}$ è equicontinua su I_1. Si può dimostrare in modo simile che le successioni $\{X(t; p^k)\}$ e $\{u(t, x; p^k)\}$ sono pur esse equicontinue su I_1, quest'ultima convergendo uniformemente rispetto ad $x \in \overline{\Omega}$. E pertanto, in virtù del teorema di Ascoli–Arzelà le successioni di funzioni continue $\{J(t; p^k)\}$, $\{X(t; p^k)\}$ e $\{u(t, x; p^k)\}$ sono compatte nello spazio di Banach di tutte le funzioni continue su I_1, normate con norma uniforme. Per conseguenza, si può estrarre da tali sequenze sottosequenze uniformemente convergenti verso certe funzioni $J^0(t)$, $X^0(t)$ e $u^0(t, x)$ continue su I_1 e $I_1 \times \Omega$, l'ultima di esse essendo uniformemente continua rispetto ad $x \in \overline{\Omega}$. Cambiando gli indici k una volta di più in modo che $k = 1, 2, 3, \cdots$ si riferisca a quelle sottosuccessioni uniformemente convergenti, si ha:

$$(3.13) \qquad J(t; p^k) \to J^0(t) \quad , \quad X(t; p^k) \to X^0(t) \quad , \quad u(t, x; p^k) \to u^0(t, x),$$

per $k \to \infty$. Ovviamente, la relazione (3.9) rimane valida anche per questi nuovi indici $k = 1, 2, 3, \cdots$. Si ha poi di più:

$$(3.14) \qquad J(t^k; p^k) \to J^0(t^0) = J^0 \quad , \quad X(t^k; p^k) \to X^0(t^0) = X^0,$$
$$u(t^k, x, p^k) \to u^0(t^0, x) = u^0(x),$$

per $k \to \infty$.

Si consideri la successione $\boldsymbol{u}^k = (t^k, J^k, X^k, u^k) \in A_I$ spettante ai nuovi indici k. In virtù delle (3.9) e (3.14) si ha uniformemente rispetto ad $x \in \overline{\Omega}$,

$$(3.15) \qquad \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{u}^0 = (t^0, J^0, X^0, u^0) \in \mathbf{U}.$$

E pertanto, per completare la dimostrazione del teorema abbiamo da provare che $u^0 \in A_I$; e cioè che esiste una strategia ammissibile $p^0 = \{\varphi^0, v^0, w^0\}$ tale che

$$(3.16) \qquad J(t^0, p^0) = J^0 \quad , \quad X(t^0; p^0) = X^0 \quad , \quad u(t^0, x; p^0) = u^0(x),$$

ove J^0, X^0 e $u^0(x)$ sono date tramite la (3.14). Per far ciò, consideriamo le seguenti funzioni vettoriali:

$$(3.17) \qquad y^0(x) = \begin{bmatrix} J^0 \\ x^0 \\ u^0(x) \end{bmatrix} \quad , \quad y(t, x; p) = \begin{bmatrix} J(t; p) \\ X(t; p) \\ u(t, x; p) \end{bmatrix},$$

determinati per $(t, x) \in I_1 \times \overline{\Omega}$ e $p \in P$. Definiamo l'insieme

$$(3.18) \qquad y(t, x; P) = \{y(t, x; p) \mid p \in P\} \qquad (t, x) \in I_1 \times \overline{\Omega}.$$

Per l'ipotesi (b), gli insiemi $J(t; P)$ e $X(t; P)$ sono chiusi e convessi per ogni fissato $t \in I_1$, in particolare per $t = t^0$. Per l'ipotesi (a) si ha poi che lo spazio strategico P è chiuso e convesso e contiene la strategia $\{0, 0, 0\}$ come punto interiore. Non solo, ma siccome il sistema di controllo è lineare e ben posto, le traiettorie dipendono linearmente e continuamente dalle strategie. E pertanto, l'insieme

$$u(t, x; \mathrm{P}) = \{u(t, x; p) \mid p \in \mathrm{P}\} \tag{3.19}$$

è chiuso e convesso per ogni fissato $(t, x) \in \mathrm{I}_1 \times \overline{\Omega}$. Per conseguenza, l'insieme $y(t, x; \mathrm{P})$ risulta chiuso e convesso per ogni fissato $(t, x) \in \mathrm{I}_1 \times \overline{\Omega}$ ed in particolare per $t = t^0$ e per ogni fissato $x \in \overline{\Omega}$.

Sia ora λ un vettore costante arbitrario. Dalla costruzione della funzione vettoriale $y^0(x)$ è chiaro che

$$\liminf_{p \in \mathrm{P}} [\lambda \cdot y(t^0, x; p)] \leq \lambda \cdot y^0(x) \leq \limsup_{p \in \mathrm{P}} [\lambda \cdot y(t^0, x; p)]. \tag{3.20}$$

Giacché le ineguaglianze (3.20) sono valide per ogni vettore λ, il vettore $y^0(x)$ appartiene necessariamente all'insieme convesso $y^0(t^0, x; \mathrm{P})$, per ogni $x \in \overline{\Omega}$. E dunque, esiste una strategia ammissibile $p^0 \in \mathrm{P}$ tale che

$$y^0(x) = y(t^0, x; p^0) \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.21}$$

È ben chiaro che l'equazione (3.21) è equivalente alle eguaglianze (3.16). E pertanto, la dimostrazione del teorema è completata.

IV. – ESISTENZA DI STRATEGIE OTTIMALI.

In questo paragrafo dimostreremo un teorema di esistenza concernente le strategie ottimali per il sistema di controllo S descritto nel paragrafo I.

Sia Λ l'*insieme bersaglio* per il sistema S. Esso è costituito da una famiglia d'insiemi chiusi Λ_t, definiti per $t \in \mathrm{I} = [\tau_1, \tau_2] \subset \mathrm{I}_1$, tali che $\Lambda_t \subseteq \Sigma$, essendo Σ un insieme di funzioni definite quasi ovunque su $\mathrm{I}_1 \times \Omega$ ed aventi certe proprietà, strettamente connesse con lo scopo del sistema S.

Poniamo

$$\mathbf{\Lambda}_t = \mathrm{J}(t, \mathrm{P}) \times \mathrm{E} \times \Lambda_t \tag{4.1}$$

e

$$\mathbf{\Lambda} = \{(t, \mathbf{\Lambda}_t) \mid t \in \mathrm{I}\}, \tag{4.2}$$

ove E è un sottoinsieme di E^1 che comparisce nel (1.7) e $\mathrm{J}(t; \mathrm{P})$ è l'insieme definito tramite (3.1).

Notiamo che se l'insieme $\mathrm{J}(t; \mathrm{P})$ è chiuso e convesso per ogni fissato $t \in \mathrm{I}_1$ (come si è assunto nel Teorema 1), ne risulta, dal fatto che è il prodotto cartesiano d'insiemi chiusi, che ogni insieme $\mathbf{\Lambda}_t$ è pur esso chiuso. L'insieme $\mathbf{\Lambda}$ sarà chiamato l'*insieme bersaglio esteso* per il sistema S.

Diremo, come al solito, che i controlli $v(t, x)$ e $w(t, x)$ fanno *trasferire* lo stato iniziale esteso $\varphi(t_0, 0, 0, \varphi)$ nell'insieme bersaglio esteso $\mathbf{\Lambda}$, se

$$(4.3)\qquad (J(t^*; p), X(t^*; p), u(t^*, x; p)) \in \mathbf{\Lambda}_{t^*} \qquad (t^* \in I),$$

ove $p = \{\varphi, v, w\}$. E pertanto, il nostro problema di ottimizzazione può essere riformulato come segue:

Determinare una strategia ammissibile $p^0 = \{\varphi^0, v^0, w^0\}$ tale che i controlli $v^0 = v^0(t, x)$ e $w^0 = w^0(t, x)$ trasferiscono lo stato iniziale esteso $\varphi^0 = (t^0, 0, 0, \varphi^0)$ nell'insieme bersaglio esteso $\mathbf{\Lambda}$ con costo minimo, e cioè,

$$(4.4)\qquad (J(t^0; p^0), X(t^0; p^0), u(t^0, x; p^0)) \in \mathbf{\Lambda}_{t^0} \qquad (t^0 \in I)$$

e

$$(4.5)\qquad J(t^0; p^0) = \text{Min}.$$

Introduciamo adesso la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. Diremo che gli insiemi chiusi $\mathbf{\Lambda}_t$ sono *superiormente semi-continui* rispetto all'*inclusione* se, per ogni $\varepsilon > 0$ e $t \in I$, vi è un $\delta = \delta(\varepsilon, t)$ positivo tale che $\mathbf{\Lambda}_\tau$ sia contenuto in una ε-vicinanza di $\mathbf{\Lambda}_t$ non appena $|t - \tau| < \delta$.

Rammentiamo che

(I) Ogni rappresentazione superiormente semi-continua è chiusa.

(II) Un funzionale continuo su un insieme compatto attinge effettivamente il suo minimo.

Il seguente teorema costituisce un'estensione immediata di un teorema di L. W. Neustadt concernente sistemi con parametri bloccati (lumped parameter systems) [1]:

TEOREMA 2. *Assumiamo in aggiunta alle ipotesi del Teorema 1 che*

(i) *Gli insiemi chiusi* $\mathbf{\Lambda}_t$ *sono superiormente semi-continui rispetto all'inclusione; e*

(ii) *Esiste una strategia ammissibile* $p = \{\varphi, v, w\} \in P$ *avente la proprietà che i controlli* $v = v(t, x)$ *e* $w = w(t, x)$ *fanno trasferire lo stato iniziale esteso* $\varphi = (t_0, 0, 0, \varphi)$ *nell'insieme bersaglio esteso* $\mathbf{\Lambda}$.

Allora esiste una strategia ottimale $p^0 = \{\varphi^0, v^0, w^0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto del Teorema 1, risulta che sotto le ipotesi di questo teorema l'insieme raggiungibile A_I del sistema S è compatto nell'intervallo di tempo I. Si ha inoltre, visto il risultato (I) di cui sopra, che la semi-continuità superiore degli insiemi chiusi Λ_t implica il fatto che l'insieme bersaglio esteso $\mathbf{\Lambda}$ è pur esso chiuso. E più di ciò, giacché ogni sotto insieme chiuso di un insieme compatto è pur esso compatto, l'insieme

$$(4.6)\qquad B = A_I \cap \mathbf{\Lambda}$$

è compatto e, per l'ipotesi (ii), è non vuoto. Poiché il funzionale costo $J(t;p)$ è continuo su un sottoinsieme compatto B di A_I, esso funzionale attinge ivi il suo minimo assoluto. E pertanto, vi è uno stato esteso $\boldsymbol{u}^0 = (t^0, J^0, X^0, u^0) \in B$ di cui J^0 è minimo. In altre parole, esiste una strategia ammissibile $p = \{\varphi^0, v^0, w^0\}$ tale che i controlli $v^0 = v^0(t, x)$ e $w^0 = w^0(t, x)$ fanno trasferire lo stato iniziale $\varphi^0(t^0, 0, 0, \varphi^0)$ nell'insieme bersaglio esteso $\boldsymbol{\Lambda}$ (specificatamente, nello stato esteso $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{\Lambda}$) con minimo costo $J^0 = J(t^0; p^0)$. Ciò completa la dimostrazione del teorema enunciato.

È chiaro che il Teorema 2 dà condizioni sufficienti per l'esistenza di una strategia ottimale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. W. NEUSTADT, *The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions*, « J. Math. Anal. a. Appl. », 7, 110–117 (1963).

[2] E. O. ROXIN, *The existence of optimal controls*, «Michigan Math. J. », 9, 109–119 (1962).

[3] M. N. OĞUZTÖRELİ, a) *Time-Lag Control Systems*, Academic Press, New York, London 1966. b) *Optimization in Distributed Parameter Control Systems. A Dynamic Programming Approach*. A publication of the Department of Mathematics, University of Alberta 1968.

[4] M. N. OĞUZTÖRELİ e D. MANGERON, *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti*, I, II, III, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, *44* (1968) (in stampa).

[5] M. PICONE, *Presentazione di trattati di Analisi Funzionale*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, *44*, 3–4 (1968).