Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mehmet Namik Oğuztöreli, Demetrio Mangeron

Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 236–242.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_236_0>

Teoria dei controlli. — *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti* (*). Nota III, di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELİ (1) e DEMETRIO MANGERON (2),(3), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — An optimization problem for a polyvibrating control system is discussed. The results of papers [2]–[5] are extended.

I. DESCRIZIONE DEL SISTEMA DI CONTROLLO ED IL PROBLEMA OTTIMALE. – Sia $I = \{t \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ un intervallo temporale dato e $J = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ un intervallo spaziale ad una sola dimensione pur esso dato. Sia S un sistema di controllo polivibrante definito su J per $t \in I$. Assumiamo che lo *stato* del sistema S, $u = u(t, x)$, è descritto, per $(t, x) \in I \times J$, dalla seguente equazione

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \lambda A(t, x) u(t, x) = v(t, x), \tag{I.1}$$

ove λ è un parametro, $A = A(t, x)$ è una funzione data continua su $I \times J$, e $v = v(t, x)$ è una funzione appartenente ad uno spazio funzionale dato V di funzioni continue su $I \times J$. Il sistema S è sottoposto alle seguenti condizioni miste:

$$\begin{cases} u(t_0, x) = \varphi_1(x) \quad , \quad u(t_1, x) = \varphi_2(x) \qquad \text{per} \quad x \in J, \\ u(t, a) = \psi_1(t) \quad , \quad u(t, b) = \psi_2(t) \qquad \text{per} \quad t \in I \end{cases} \tag{I.2}$$

ove $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sono certe funzioni appartenenti a certi spazi funzionali Φ_1, Φ_2, Ψ_1 e Ψ_2 di funzioni continuamente differenziabili su J, J, I ed I, rispettivamente, soddisfacenti le condizioni

$$\psi_1(t_0) = \varphi_1(a) \quad , \quad \varphi_1(b) = \psi_2(t_0) \quad , \quad \varphi_2(a) = \psi_1(t) \quad , \quad \varphi_2(b) = \psi_2(t_1). \tag{I.3}$$

L'equazione (I.1) soggetta alle condizioni (I.2)–(I.3) fu studiata per esteso dal D. Mangeron [6]. Conseguentemente, specie dopo l'indicazione fatta dall'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone [7] del ruolo che possono avere le equazioni polivibranti (4), caratterizzate dalla presenza nel termine d'ordine superiore della *derivata totale*, da Lui introdotta, tale equazione come pure le sue diverse generalizzazioni che includono sistemi polivibranti non lineari, con operatori di rimanenza ed argomenti ritardati,

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Department of Mathematics. The University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(2) Polytechnic Institute of Jassy. Iasi, Romania. At present Visiting professor at the University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(3) The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(4) Le equazioni polivibranti sono state chiamate da vari autori «equazioni di Mangeron».

sono state studiate dal Mangeron stesso, dal Yu. M. Berezanski [8], G. Birkhoff [9], D. Boinov [10], E. De Giorgi [11], S. Faedo [12], P. Delerue [13], J. Favard [14], G. Fichera [15], W. J. Gordon [16], L. E. Krivoshein [17], T. Kamytov [18], F. Manaresi [19], F. G. Mazzarella [20], M. N. Oğuztöreli [21], L. Poli [22], D. Pompeiu [23], A. Rosenblatt [24], F. S. Rossi [25], M. Salvadori [26], G. Stampacchia [27] ed altri ancora.

Sia $P = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \Psi_1 \times \Psi_2 \times V$. Ogni $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\} \in P$ sarà chiamata una *strategia ammissibile* e lo spazio P lo *spazio strategico.*

Nella Memoria [6] si è dimostrato che l'equazione (I.1) ammette una soluzione unica continua appartenente ad uno certo spazio funzionale soddisfacente le condizioni (I.2), (I.3), per ogni $p \in P$. Sia $u = u(t, x; p)$ questa soluzione. La misura della performanza del sistema S spettante alla strategia $p \in P$ sia espressa dal seguente *funzionale costo* associato al sistema S

$$F(u, p) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b Q\left(u(t, x; p), u_x(t, x; p), p, t, x\right) dx\, dt, \tag{I.4}$$

ove Q è una funzione data continua non negativa in (t, x) e continuamente differenziabile rispetto ad u, u_x e $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\} \in P$. Il nostro problema di ottimizzazione consiste nella ricerca di una strategia ammissibile $p^0 \in P$ per la quale il funzionale costo $F(u, p)$ assuma il suo minimo, e cioè si abbia

$$F(u^0, p^0) = \min_{p \in P} F(u, p), \tag{I.5}$$

essendo $u = u(t, x; p)$ ed $u^0 = u(t, x; p^0)$.

In questa Nota ci occuperemo soltanto della ricerca delle condizioni necessarie di ottimalità spettanti ad una strategia ammissibile.

II. RAPPRESENTAZIONE DELLA $u(t, x; p)$. – Nella [6] si è dimostrato che la soluzione $u(t, x; p)$ dell'equazione (I.1) soddisfacente le condizioni (I.2)–(I.3) soddisfa la seguente equazione integrale di Fredholm di seconda specie:

$$u(t, x; p) = h(t, x; p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b G(t, x; \sigma, \eta)\, u(\sigma, \eta)\, A(\sigma, \eta)\, d\eta\, d\sigma, \tag{II,1}$$

per $(t, x, p) \in I \times J \times P$, ove

$$\begin{aligned} h(t, x; p) = {} & \frac{x-a}{b-a}\psi_2(t) - \frac{x-b}{b-a}\psi_1(t) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\varphi_2(x) - \frac{t-t_1}{t_1-t_0}\varphi_1(x) \\ & + \frac{(x-a)(t-t_1)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_2(t_0) + \frac{(x-b)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_1(t_1) \\ & - \frac{(x-a)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_2(t_1) - \frac{(x-b)(t-t_1)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_1(t_0) \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b G(t, x; \theta, \xi)\, v(\theta, \xi)\, d\xi\, d\theta, \end{aligned} \tag{II.2}$$

essendo $G(t, x; \sigma, \eta)$ la funzione di Green–Burckhardt associata all'equazione (I.1):

$$
\text{(II.3)} \qquad (b-a)(t_1-t_0)\, G(t, x; \sigma, \eta) = \begin{cases} (b-x)(t_1-t)(\eta-a)(\sigma-t_0) & \text{per } \eta \leq x,\ \sigma \leq t, \\ (b-x)(t-t_0)(\eta-a)(t_1-\sigma) & \text{per } \eta \leq x,\ \sigma \geq t, \\ (x-a)(t_1-t)(b-\eta)(\sigma-t_0) & \text{per } \eta \geq x,\ \sigma \leq t, \\ (x-a)(t-t_0)(b-\eta)(t_1-\sigma) & \text{per } \eta \geq x,\ \sigma \geq t \end{cases}
$$

per $(\sigma, \eta) \in I \times J$, $(t, x) \in I \times J$. Nella stessa Memoria [6] si è pure dimostrato che la funzione $G \equiv G(t, x; \sigma, \eta)$ è continua per tutti i suoi argomenti, mentre si ha

$$
\text{(II.4)} \qquad \begin{aligned} \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta-\varepsilon} &= -\frac{(t_1-t)(\sigma-t_0)}{t_1-t_0} && \text{per } \sigma \leq t, \\ \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta-\varepsilon} &= -\frac{(t-t_0)(t_1-\sigma)}{t_1-t_0} && \text{per } \sigma \geq t, \\ \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma-\varepsilon} &= -\frac{(b-x)(\eta-a)}{b-a} && \text{per } \eta \leq x, \\ \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma-\varepsilon} &= -\frac{(x-a)(b-\eta)}{b-a} && \text{per } \eta \geq x. \end{aligned}
$$

Si è stabilito inoltre che la funzione $G(t, x; \sigma, \eta)$ è non negativa e simmetrica rispetto a (t, x) e (σ, η).

Sia $\Gamma(t, x; \eta, \sigma; \lambda)$ il *nucleo risolvente* corrispondente al nucleo $G(t, x; \sigma, \eta)\, A(\sigma, \eta)$. Si ha, per $(t, x, p) \in I \times J \times P$,

$$
\text{(II.5)} \qquad u(t, x; p) = h(t, x; p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \Gamma(t, x; \sigma, \eta; \lambda)\, h(\sigma, \eta)\, d\eta\, d\sigma,
$$

purché λ non sia un valore caratteristico dell'operatore integrale

$$
\text{(II.6)} \qquad T(u)(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b G(t, x; \sigma, \eta)\, A(\sigma, \eta)\, u(\sigma, \eta)\, d\eta\, d\sigma .
$$

In questa Nota si assume che λ non è un valore caratteristico.

È chiaro che la funzione $h(t, x; p)$ è continuamente differenziabile rispetto a $(t, x, p) \in I \times J \times P$. Il nucleo risolvente Γ è continuo in tutti i suoi argomenti mentre $\partial\Gamma/\partial t$ e $\partial\Gamma/\partial x$ sono frammentariamente continue con singolarità deboli per $t = \sigma$ e $x = \eta$ ove subiscono i medesimi salti delle funzioni $\partial G/\partial t$ e $\partial G/\partial x$, descritti dalle equazioni (II.4). Nella Memoria [6] si è dimostrato che è permessa la derivazione rispetto a t ed x sotto il segno integrale in

$$
\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b G(t, x; \sigma, \eta)\, A(\sigma, \eta)\, u(\sigma, \eta)\, d\eta\, d\sigma .
$$

Epperciò, si può derivare rispetto a t ed x sotto il segno integrale anche l'espressione

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \Gamma(t, x; \sigma, \eta; \lambda)\, h(\sigma, \eta; p)\, d\eta\, d\sigma .$$

III. Condizioni necessarie di ottimalità. – In ciò che segue stabiliremo, utilizzando i metodi della programmazione dinamica, già cospicuamente adoperati nelle nostre Note Lincee facenti parte della medesima serie [2]–[4], come pure anche nella [5 *a*] e [5 *b*], condizioni necessarie di ottimalità per una strategia ammissibile p.

Facendo uso del principio di ottimalità di R. Bellman [1] come pure del metodo esposto nelle Note [2]–[5], si può facilmente dimostrare che il funzionale

$$\text{(III.1)} \qquad G(p; \tau) \equiv -\int_a^b Q(u(\tau, x, p), u_x(\tau, x, p), p, \tau, x)\, dx$$

assume per una strategia ottimale $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\}$ e per ogni $\tau \in I$ il suo minimo. In questo modo abbiamo, per una strategia ottimale,

$$\text{(III.2)} \qquad \delta_v G(p; \tau) = 0 \quad , \quad \delta_{\varphi_k} G(p; \tau) = 0 \quad , \quad \delta_{\psi_k} G(p; \tau) = 0 \quad (k = 1, 2), \ \tau \in I,$$

ove $\delta_v G$, $\delta_{\varphi_k} G$ e $\delta_{\psi_k} G$ denotano le prime variazioni del funzionale $G = G(p; \tau)$ rispetto a v, φ_k e ψ_k, corrispondenti agli incrementi $\delta v = \delta v(t, x)$, $\delta\varphi_k = \delta\varphi_k(x)$ e $\delta\psi_k = \delta\psi_k(t)$, tali che si abbia rispettivamente $v + \delta v \in V$, $\varphi_k + \delta\varphi_k \in \Phi_k$ e $\psi_k + \delta\psi_k = \Psi_k$ $(k = 1, 2)$. Si ha inoltre, tenendo conto della formula rappresentativa (II.5),

$$\text{(III.3)} \qquad \delta_* u(t, x; p) = \delta_* h(t, x; p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \Gamma(t, x; \sigma, \eta; \lambda)\, \delta_* h(\sigma, \eta; p)\, d\eta\, d\sigma,$$

ove col δ_* si è notato l'uno dei simboli δ_v, δ_{φ_k}, δ_{ψ_k}.

Dall'equazione (II.2) si ottiene

$$\text{(III.4)} \quad \begin{cases} \delta_v h(t, x; p) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b G(t, x; \theta, \xi)\, \delta v(\theta, \xi)\, d\xi\, d\theta, \\[2ex] \delta_{\varphi_1} h(t, x; p) = \dfrac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\, \delta\varphi_1(x), \\[2ex] \delta_{\varphi_2} h(t, x; p) = \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0}\, \delta\varphi_2(x), \\[2ex] \delta_{\psi_1} h(t, x; p) = \dfrac{b - x}{b - a}\, \delta\psi_1(t) + \dfrac{(x - b)(t - t_0)}{(b - a)(t_1 - t_0)}\, \delta\psi_1(t_1) - \dfrac{(x - b)(t - t_1)}{(b - a)(t_1 - t_0)}\, \delta\psi_1(t_0), \\[2ex] \delta_{\psi_2} h(t, x; p) = \dfrac{x - a}{b - a}\, \delta\psi_2(t) - \dfrac{(x - a)(t - t_0)}{(b - a)(t_1 - t_0)}\, \delta\psi_2(t_1) + \dfrac{(x - a)(t - t_1)}{(b - a)(t_1 - t_0)}\, \delta\psi_2(t_0). \end{cases}$$

Si ha inoltre, se si tiene conto delle osservazioni fatte alla fine del § II,

$$\text{(III.5)}\qquad \delta_* u_x(t\,,x\,;p) = \delta_* h_x(t\,,x\,;p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \Gamma_x(t\,,x\,;\sigma\,,\eta\,;\lambda)\,\delta_* h(\sigma\,,\eta\,;p)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\sigma,$$

ove si è posto $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Si ha finalmente

$$\text{(III.6)}\qquad \delta_* \mathrm{G}(p\,;\tau) = -\int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\delta_* u(\tau,x\,;p) + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\delta_* u_x(\tau,x\,;p) + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial *}\,\delta * (\tau,x) \right\} \mathrm{d}x,$$

ove $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q}\,(u\,(\tau\,,x\,;p)\,,u_x\,(\tau\,,x\,;p)\,,p\,,\tau\,,x)$, $\tau \in \mathrm{I}$.

Si può verificare senza difficoltà che l'equazione $\delta_v\,\mathrm{G}\,(p\,;\tau) = 0$ sarà soddisfatta per ogni variazione continua $\delta v\;(v + \delta v \in \mathrm{V})$ se e soltanto se si verificano per $\tau\,,\theta \in \mathrm{I}$, $x\,,\xi \in \mathrm{I}$ le equazioni

$$\text{(III.7)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v} = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\mathrm{G}\,(\tau\,,x\,;\theta\,,\xi) + \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\mathrm{G}_x(\tau\,,x\,;\theta\,,\xi) \\[2mm] \quad + \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x\,;\sigma,\eta\,;\lambda) + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau\,,x\,;\sigma\,,\eta\,;\lambda) \right\} \mathrm{G}(\sigma,\eta\,;\theta\,,\xi)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\sigma = 0. \end{cases}$$

Successivamente, l'equazione $\delta_{\varphi_1}\mathrm{G}\,(p\,;\tau) = 0$ sarà soddisfatta per ogni funzione continuamente differenziabile $\delta\varphi_1\,(\varphi_1 + \delta\varphi_1 \in \Phi_1)$ e tale che si abbia $\delta\varphi_1(a) = \delta\varphi_1(b)$, allora ed allora soltanto se si verificano, per $(\tau\,,\eta) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J}$, le equazioni

$$\text{(III.8)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \varphi_1} = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\right) \\[2mm] \quad + \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left[\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x\,;\sigma,\eta\,;\lambda) + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau\,,x\,;\sigma\,,\eta\,;\lambda) \right] \frac{t_1-\sigma}{t_1-\tau}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione $\delta_{\varphi_2}\mathrm{G}\,(p\,;\tau) = 0$, pur essa, sarà soddisfatta per ogni variazione continuamente differenziabile $\delta\varphi_2\,(\varphi_2 + \delta\varphi_2 \in \Phi_2)$ e tale che si abbia $\delta\varphi_2(a) = \delta\varphi_2(b) = 0$, allora ed allora soltanto se si verificano per $(\tau\,,\eta) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J}$, le equazioni

$$\text{(III.9)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \varphi_2} = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\right) \\[2mm] \quad + \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left[\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x\,;\sigma,\eta\,;\lambda) + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau\,,x\,;\sigma\,,\eta\,;\lambda) \right] \frac{\sigma-t_0}{t_1-\tau}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione $\delta_{\psi_1} G(p\,;\tau) = 0$ sarà soddisfatta per ogni variazione continua $\delta\psi_1 (\psi_1 + \delta\psi_1 \in \Psi_1)$, essendovi $\delta\psi_1(t_0) = \delta\psi_1(t_1) = 0$, se e soltanto se si verificano, per ogni $\tau, \sigma \in I$, le equazioni

$$\text{(III.10)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_1} + (b - x)\dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial Q}{\partial u_x} = 0\,, \\ \displaystyle\int_a^b\!\!\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\, \Gamma(\tau, x\,; \sigma, \eta\,; \lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\, \Gamma_x(\tau, x\,; \sigma, \eta\,;\lambda)\right] (b - \eta)\, dx\, d\eta = 0\,, \end{cases}$$

e, finalmente, l'equazione $\delta_{\psi_2} G(p, \tau) = 0$ sarà soddisfatta per ogni variazione continua $\delta\psi_2 (\psi_2 + \delta\psi_2 \in \Psi_2)$, con $\delta\psi_2(t_0) = \delta\psi_2(t_1) = 0$, per ogni $\tau, \sigma \in I$, se e soltanto se hanno luogo le equazioni

$$\text{(III.11)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_2} + (x - a)\dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial Q}{\partial u_x} = 0\,, \\ \displaystyle\int_a^b\!\!\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\, \Gamma(\tau, x\,; \sigma, \eta\,; \lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\, \Gamma_x(\tau, x\,; \sigma, \eta\,; \lambda)\right] (\eta - a)\, dx\, d\eta = 0\,. \end{cases}$$

E pertanto, *strategie ottimali sono da ricercarsi tra le strategie ammissibili* $\{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\}$ *soddisfacenti simultaneamente le equazioni* (III.7)–(III.11).

IV. OSSERVAZIONI. – 1. Nella Serie di Note successive continueremo l'esposizione dei nostri risultati conseguiti nello studio dei problemi ottimali spettanti ai sistemi polivibranti vieppiù complicati, schematizzati nei controlli con parametri distribuiti.

2. Una volta ottenute condizioni necessarie cui soddisfano le strategie ottimali, di un notevole interesse sarà il conseguimento dei risultati collegati con lo studio dei criteri sufficienti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. E. BELLMAN, *Dynamic Programming*. Princeton University Press. Princeton, N. J. 1957.

[2] M. N. OĞUZTÖRELİ, *Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, (in stampa).

[3] M. N. OĞUZTÖRELİ e D. MANGERON, *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti*, Nota I, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª (in stampa).

[4] M. N. OĞUZTÖRELİ e D. MANGERON, *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª (in stampa). Nota II.

[5] M. N. OĞUZTÖRELİ, a) *Time-Lag Control Systems*. Academic Press, New York and London 1966; b) *Optimization in Distributed Parameter Control Systems. – A Dynamic Programming Approach*. A Publication of the Dept. Math. Univ. of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada 1968.

[6] D. MANGERON, *Problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali di quart'ordine con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli », s. 4ª, *2*, 28–40 (1932).

[7] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Conferenza tenuta il 27 maggio 1937 al Seminario Matematico dell'Università di Iasi, « Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy », I–e Sect., XXVI (*1*), 183–232 (1940).

[8] YU. M. BEREZANSKI, *Sui problemi al contorno concernenti operatori differenziali generalizzati* (in russo), « Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. », 122, 6, 959–962 (1958).

[9] G. BIRKHOFF W. J. GORDON, *The Draftsman's and Related Equations,* Research Publ. GMR–748, Warren, Michigan, 14 (1968).

[10] D. BOINOV, *Quelques problèmes concernant les équations de Mangeron*, « Ann. Inst. Mec. et Electr. », III, 6 (1968).

[11] E. DE GIORGI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali.* Scritti Matematici offerti a Mauro Picone, Bologna, Azzoguidi, 781–787 (1955).

[12] S. FAEDO, *Alcuni problemi risoluti nell'ambito dell'I.N.A.C.*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », II, *2*, 6 (1947).

[13] P. DELERUE, *Quelques nouveaux problèmes à la frontière.* « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », s. n., XII (XVI), *1–2*, 101–106 (1966).

[14] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites « équations de Mangeron »*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », s. n., XI (XV), *1–2*, 17–20 (1965).

[15] G. FICHERA, *Nuovi risultati conseguiti nell'ambito dell'I.N.A.C.*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », III, *2*, 8 (1948).

[16] W. J. GORDON, *Spline–Weighted Bivariate Interpolation through curve networks.* Research Publ. GMR–758, Warren, Michigan, 29 (1968).

[17] L. E. KRIVOSHEIN, *Su un problema spettante alle equazioni integro–differenziali polivibranti* (in russo), « Trudy 12–i Konf. Kirg. Gos. Univ. », Frunze, 6 (1964).

[18] T. KAMYTOV, *Applicazione del metodo di Mangeron–Krivoshein nello studio di alcuni sistemi integro–differenziali*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, 37, *5*, 242–245 (1965).

[19] F. MANARESI, *Studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *20*, 163–213 (1964).

[20] F. G. MAZZELLA, *Alcuni teoremi concernenti i problemi di Mangeron*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », s. n., IX (XIII), *3–4*, 35–38 (1963).

[21] M. N. OĞUZTÖRELİ e D. MANGERON, *Studies of Mathematical Physics Differential Systems by Laplace–Picone Transforms*, « Revue Roumaine Sci. Techn. serie de Mec. Appl. », 13, 20 (1968).

[22] L. POLI e P. DELERUE, *Le Calcul Symbolique à deux Variables*, Gauthier–Villars, Paris 1954.

[23] D. POMPEIU, *Equations à caractéristiques réelles doubles*, « Bull. So. Roum. Math », 6 (1948).

[24] A. ROSENBLATT, *Approximations successives pour les équations à caractéristiques réelles et multiples*, « C. r. Acad. Sci. », *198*, 1278–80 (1933).

[25] F. S. ROSSI, *Problemi di Mangeron non lineari*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy IX (XIII), *3–4*, 39–42 (1963).

[26] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », s. II, *5*, 51–72 (1936).

[27] G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi a contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*, « Giorn. Mat. », *78*, 81–96 (1948–49).