Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci

Sulla generalizzazione di un teorema di Kochen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 221–230.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_221_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Algebra. — *Sulla generalizzazione di un teorema di Kochen.* Nota di UMBERTO BARTOCCI (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper a generalization of a theorem of Kochen is given. Moreover, certain properties of an ultraproduct of rings are discussed.

Questo lavoro si propone di generalizzare un teorema di Kochen relativo agli ideali (propri) di un prodotto diretto di corpi; esso prova che siffatti ideali sono in corrispondenza biunivoca con i filtri sull'insieme degli indici della famiglia di corpi. Qui si dà una condizione necessaria (e sufficiente nel caso di anelli unitari) affinché di tale proprietà godano gli ideali di un prodotto diretto di anelli qualunque.

La I parte è dedicata ad alcuni richiami relativi a filtri ed ultrafiltri e la II parte porge la suddetta generalizzazione. La III parte, traendo spunto da ciò che precede, considera certe proprietà degli ultraprodotti di anelli; più precisamente, in essa si studiano gli ultraprodotti di anelli locali e si analizza quando un ultraprodotto di anelli noetheriani risulta esso pure noetheriano. Si affronta così il problema del trasporto ad un ultraprodotto di anelli di proprietà dei suoi fattori e si accenna anche al problema inverso, e cioè allo studio di proprietà dei fattori a partire da proprietà valide in un qualunque ultraprodotto (proprio).

PARTE I. – RICHIAMI RELATIVI A FILTRI ED ULTRAFILTRI.

1. Ricordiamo alcune definizioni e proprietà che saranno utilizzate nel seguito, per una trattazione più diffusa delle quali rimandiamo a N. Bourbaki [2] (1).

Assegnato un insieme A, un sottoinsieme $\mathfrak{F}$ dell'insieme delle parti di A ($\mathfrak{F} \subseteq P(A)$) si dice un *filtro* (su A) se (non è vuoto e) soddisfa le seguenti proprietà:

1.1. $\mathfrak{F} \ni X, Y \Rightarrow \mathfrak{F} \ni X \cap Y$

1.2. $\mathfrak{F} \ni X, Y \supseteq X \Rightarrow \mathfrak{F} \ni Y$

1.3. $\mathfrak{F} \not\ni \varnothing$.

Un filtro $\mathfrak{F}$ si dice poi un *ultrafiltro* se è massimale nella famiglia dei filtri (ordinata per inclusione).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1968.

(1) I numeri tra [ ] rimandano alla bibliografia posta alla fine del lavoro.

Si prova che:

1.4. *Un filtro* $\mathfrak{F}$ *è un ultrafiltro se e solo se, qualunque sia* $X \in P(A)$, *si verifica una delle due eventualità (e quindi una sola)* $\mathfrak{F} \ni X$, $\mathfrak{F} \ni A - X$.

Ne consegue che se $\mathfrak{F}$ è un ultrafiltro e $\mathfrak{F} \ni X \cup Y$, con $X, Y \in P(A)$ tali che $X \cap Y = \varnothing$, allora vale una ed una sola delle $\mathfrak{F} \ni X$, $\mathfrak{F} \ni Y$.

Ogni filtro su A è contenuto in qualche ultrafiltro. Un sottoinsieme non vuoto di P (A) è contenuto in qualche filtro se e solo se soddisfa la proprietà delle intersezioni finite (cioè se e solo se l'intersezione di un numero finito di suoi elementi è non vuota). Il minimo filtro contenente tale insieme si dice il filtro da esso *generato*, e consta di tutti e soli i sottoinsiemi di A che contengono qualche intersezione di un numero finito di elementi dell'insieme.

Un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ si dice *principale* se consta di tutti e soli i sottoinsiemi di A contenenti un fissato elemento $\alpha \in A$ ($\mathfrak{F}$ è cioè generato da $\{\alpha\}$). Ogni ultrafiltro di un insieme finito è principale ed un insieme infinito ammette certo ultrafiltri non principali (si pensi ad un ultrafiltro contenente il filtro dei complementari delle parti finite di tale insieme).

2. Consideriamo ora una famiglia di anelli non nulli $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$, e formiamone il prodotto diretto, che denoteremo con $R = \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$. Se $x \in R$, indicheremo con x_α la *componente* α*-esima* di x e con Z_x il sottoinsieme di A definito da

$$Z_x \ni \alpha \Longleftrightarrow x_\alpha = 0.$$

Ciò premesso, consideriamo un filtro $\mathfrak{F}$ sull'insieme degli indici A, e quindi la totalità degli elementi $x \in R$ tali che $Z_x \in \mathfrak{F}$. Tale totalità costituisce un ideale di R (diverso dall'intero anello), di guisa che resta introdotta una corrispondenza univoca ψ dall'insieme dei filtri su A all'insieme degli ideali propri di R.

Si prova che:

2.1. *La corrispondenza* ψ *è iniettiva.*

Il teorema di Kochen (cfr. S. Kochen [4]) assicura che:

2.2. *La corrispondenza* ψ *è biunivoca se gli anelli* R_α *sono corpi.*

Si può infine introdurre l'anello quoziente di R rispetto ad un filtro $\mathfrak{F}$, definito come l'anello $R/\psi(\mathfrak{F})$ (che si può indicare più semplicemente con $R/\mathfrak{F}$). Due elementi x ed y di R sono equivalenti rispetto a $\psi(\mathfrak{F})$ (a $\mathfrak{F}$) se e soltanto se l'insieme degli indici α per cui risulta $x_\alpha = y_\alpha$ appartiene ad $\mathfrak{F}$.

Se $\mathfrak{F}$ è un ultrafiltro, $R/\mathfrak{F}$ si dice un *ultraprodotto* degli anelli R_α (*proprio* se $\mathfrak{F}$ non è principale). Se $\mathfrak{F}$ è principale e generato dall'elemento $\beta \in A$, allora risulta

$$R/\mathfrak{F} \simeq R_\beta$$

Parte II. – Generalizzazione del teorema di Kochen.

3. Occupiamoci ora dell'estensione del teorema di Kochen, studiando se esistono o meno casi ulteriori nei quali l'insieme degli ideali propri del prodotto diretto $R = \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ corrisponde biunivocamente all'insieme dei filtri sull'insieme degli indici A.

Proviamo che:

3.1. *Condizione necessaria affinché la corrispondenza ψ sia biunivoca è che ogni ultraprodotto della famiglia di anelli sia un anello semplice (privo cioè di ideali non banali).*

Dimostrazione. – La corrispondenza ψ sia dunque (non soltanto iniettiva ma anche) surjettiva ed $\mathfrak{F}$ denoti un ultrafiltro; proviamo che $R/\mathfrak{F}$ è privo di ideali non banali. Consideriamo un ideale

$$J = \psi(\mathfrak{F}') \triangleleft R;$$

l'anello $J/J \cap \psi(\mathfrak{F}) = J/\mathfrak{F}$ risulta immerso canonicamente in $R/\mathfrak{F}$ come ideale e lo identificheremo con la sua immagine. Viceversa sia $\mathfrak{L}$ un ideale proprio di $R/\mathfrak{F}$; esiste certo un ideale proprio $\mathfrak{L}^*$ di R tale che $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{L}^*/\mathfrak{F}$. Basta prendere la totalità degli elementi $x \in R$ tali che

$$[x] \in \mathfrak{L} \quad ([x] = x + \psi(\mathfrak{F})).$$

Raggiungeremo quindi il risultato provando che l'ideale $J/\mathfrak{F}$ è un ideale banale. Se $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, risulta ovviamente $J/\mathfrak{F} = \{0\}$. In caso contrario, sia $\bar{A} \in \mathfrak{F}'$ tale che $\bar{A} \notin \mathfrak{F}$: certo $\mathfrak{F} \ni A - \bar{A}$ e J contiene tutti gli elementi che hanno componenti nulle in $\bar{A}$ (indicheremo un tale insieme, che è un ideale di R, con $\prod_{\alpha \in A - \bar{A}} R_\alpha$). Tali elementi forniscono un rappresentante per ognuna delle classi di $R/\mathfrak{F}$ epperò $J/\mathfrak{F} \simeq R/\mathfrak{F}$.

Dalla 3.1 e dall'ultima osservazione del n. 2 si trae il seguente corollario:

3.2. *Condizione necessaria affinché la corrispondenza ψ sia biunivoca è che tutti gli anelli R_α siano semplici.*

Il corollario si dimostra però subito direttamente, riflettendo sulla circostanza che se R_β non è semplice e contiene l'ideale non banale J, allora R contiene l'ideale $J \times \prod_{\alpha \in A - \{\beta\}} R_\alpha$ che non è immagine di alcun filtro.

Osserviamo esplicitamente che la dimostrazione data per la 3.1 permette subito di trovare esempi di ideali di R che non sono immagini di alcun filtro, anche se gli anelli R_α sono tutti semplici ma qualche loro ultraprodotto non lo è (possibilità questa che può verificarsi, come proveremo poi con un esempio). Basta considerare un ideale non banale di un ultraprodotto $R/\mathfrak{F}$ non semplice e quindi la sua antiimmagine nella proiezione canonica $R \to R/\mathfrak{F}$.

Procediamo oltre nell'indagine, provando che la condizione precedente è pure sufficiente nel caso di anelli unitari.

3.3. *Supposto che gli anelli R_α siano unitari, condizione necessaria e sufficiente affinché la corrispondenza ψ sia biunivoca, è che ogni loro ultraprodotto sia un anello semplice.*

Dimostrazione. – Sia J un ideale proprio di R; consideriamo la totalità $\mathfrak{F}'$ dei sottoinsiemi di A così definita

$$X \in \mathfrak{F}' \Longleftrightarrow \exists x \in J : Z_x = X.$$

Si dimostra subito che $\mathfrak{F}'$ o è un filtro su A o è l'intero P(A); proveremo che, nell'ipotesi che ogni ultraprodotto degli anelli R_α sia semplice, risulta $\mathfrak{F}'$ un filtro e $J = \psi(\mathfrak{F}')$.

A tale scopo basta far vedere che se $B \in \mathfrak{F}'$ e $B \neq A$ risulta $J \supseteq \prod_{\alpha \in A-B} R_\alpha$.

Consideriamo l'insieme X di tutti gli elementi $x \in J$ tali che $x_\alpha = 0$ per $\alpha \in B$, e supponiamo per assurdo

$$X \subset \prod_{\alpha \in A-B} R_\alpha ,$$

cioè che esista un elemento $y \notin J$ tale che $y_\alpha = 0$ per α in B.

Consideriamo per $\forall x \in X$ l'insieme di indici C_x così definito

$$\alpha \in C_x \Longleftrightarrow y_\alpha = x_\alpha .$$

È chiaro che $C_x \supseteq B$, così come è chiaro che, nelle nostre ipotesi, $C_x \neq A$. Poniamo

$$C_x^* = A - C_x = \varnothing ,$$

e proviamo che per la famiglia $\{C_x^*\}_{x \in X}$ vale la proprietà delle intersezioni finite. Supponiamo infatti per assurdo che risulti $C_{x_1}^* \cap C_{x_2}^* \cap \cdots \cap C_{x_n}^* = \varnothing$ cioè $C_{x_1} \cup C_{x_2} \cup \cdots \cup C_{x_n} = A$. Risulterebbe allora $y = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \cdots + x_n r_n \in J$, contro il supposto, ove si definiscano gli elementi $r_1, r_2, \cdots, r_n$ con le

$$r_{1,\alpha} = 1 \quad \alpha \in C_{x_1}, \; r_{1,\alpha} = 0 \quad \alpha \notin C_{x_1}, \; r_{2,\alpha} = 1 \quad \alpha \in C_{x_2} - C_{x_1} \cap C_{x_2},$$

$$r_{2,\alpha} = 0 \quad \alpha \notin C_{x_2} - C_{x_1} \cap C_{x_2}, \cdots, r_{n,\alpha} = 1 \quad \alpha \in C_{x_n} - C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n-1}},$$

$$r_{n,\alpha} = 0 \quad \alpha \notin C_{x_n} - C_{x_1} \cap \cdots \cap C_{x_{n-1}} .$$

Esiste allora un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ che contiene tutti gli insiemi C_x^*, e raggiungeremo la conclusione provando che $R/\mathfrak{F}$ non è semplice, in quanto contiene l'ideale non banale $J/\mathfrak{F}$. Certo $J/\mathfrak{F}$ non è nullo: poiché $B \in \mathfrak{F}'$ esiste $\bar{x} \in J$ tale che $Z_{\bar{x}} = B$, epperò in $A - B \supseteq C_{\bar{x}}^*$ le componenti di $\bar{x}$ sono tutte non nulle. Inoltre $J/\mathfrak{F}$ non può coincidere con tutto $R/\mathfrak{F}$, poiché $J/\mathfrak{F} \not\ni [y]$, ossia

$$y' \equiv y \pmod{\mathfrak{F}} \Rightarrow y' \notin J .$$

Per provare quest'ultima implicazione si noti che, se esistesse un $y' \in J$ tale che $y'_\alpha = y_\alpha$ per $\alpha \in T \in \mathfrak{F}$, allora risulterebbe $J \ni y'' = y' r$, ove r si definisca mediante le

$$r_\alpha = 1 \quad \alpha \in A - B \quad , \quad r_\alpha = 0 \quad \alpha \in B .$$

Riuscirebbe dunque $y'' \in X$ e potremmo considerare $C_{y''}^*$; è evidente però che, in $C_{y''}^* \cap T \in \mathfrak{F}$, y'' ed y dovrebbero avere le stesse componenti, mentre in $C_{y''}^*$, per definizione di y'', y ed y'' non hanno alcuna componente in comune.

4. Osserviamo esplicitamente che, nel caso in cui gli anelli R_α non siano tutti unitari, la circostanza che ogni loro ultraprodotto sia semplice non garantisce la biunivocità della corrispondenza ψ.

Si consideri ad esempio l'anello semplice che ha come gruppo abeliano sostegno il gruppo ciclico di ordine p (p numero primo) Z_p ed un prodotto identicamente nullo (indicheremo tale anello ancora con Z_p). È facile controllare che nell'anello $Z_p \times Z_p$ gli ideali associati ai filtri sono $\{0\}$, $Z_p \times \{0\}$, $\{0\} \times Z_p$ e che ogni ultraprodotto di tali anelli è semplice. $Z_p \times Z_p$ contiene però un ideale distinto dai precedenti, costituito dall'immagine di Z_p tramite la rappresentazione diagonale che associa ad $x \in Z_p$ l'elemento $(x, x) \in Z_p \times Z_p$.

Diamo ora un esempio di una famiglia di anelli semplici ed unitari che ammette ultraprodotti che non sono semplici.

Si consideri la famiglia $\{M_n(F)\}_{n \in N}$, ove N indichi l'insieme dei numeri naturali ed $M_n(F)$ l'anello delle matrici quadrate di ordine n su un campo F, e mostriamo che, se $\mathfrak{F}$ è un qualunque ultrafiltro non principale su N, l'anello $\prod_{n \in N} M_n(F)/\mathfrak{F} = M/\mathfrak{F}$ non è semplice.

Indichiamo infatti con $1^{(n)}$ la matrice unità di $M_n(F)$ e con $e_{hk}^{(n)}$ la matrice di $M_n(F)$ che ha $1\ (\in F)$ all'incrocio della colonna k–esima con la riga h–esima e O altrove; consideriamo quindi in M l'elemento

$$e = (e_{11}^{(1)}, e_{11}^{(2)}, e_{11}^{(3)}, \cdots)$$

e la sua classe $[e]$ in $M/\mathfrak{F}$. L'ideale generato da $[e]$ è certamente diverso sia dall'ideale nullo che dall'intero anello, in quanto mostreremo che, posto $\bar{1} = (1^{(1)}, 1^{(2)}, 1^{(3)}, \cdots)$, la classe $[\bar{1}]$ non appartiene a quell'ideale. Infatti, ove fosse $[\bar{1}] \in ([e])$, ne risulterebbe

$$[\bar{1}] = \sum_{1}^{t}{}_{r}\, [a_r]\,[e]\,[b_r],$$

con $a_r, b_r \in M$, e cioè

$$1^{(n)} = \sum_{1}^{t}{}_{r}\, a_{r,n}\, e_{11}^{(n)}\, b_{r,n}$$

per $n \in N^* \in \mathfrak{F}$; ma, poiché $\mathfrak{F}$ non è principale, N^* non è finito e la relazione precedente risulta impossibile ad esempio per $n > t$.

Osserviamo esplicitamente che l'esempio precedente permette di trovare altresì esempi ulteriori nei quali la corrispondenza ψ risulta biunivoca; basta all'uopo considerare un prodotto $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ ove si assuma $R_\alpha = M_n(F)$ per un fissato n $\left(\text{si scrive } \prod_{\alpha \in A} R_\alpha = M_n(F)^A\right)$.

Tale circostanza continua a sussistere se F è un corpo, di guisa che la corrispondenza ψ risulta biunivoca anche se si assume $R_\alpha = R$, ove con R si indichi un anello semplice ed artiniano. Infatti, per un teorema di Wedderburn, un anello semplice artiniano risulta isomorfo ad un anello di matrici su un corpo. Quest'osservazione permette di determinare gli ideali dell'anello R^A

anche nel caso di un anello R che sia semi–semplice artiniano. Un tale anello risulta infatti isomorfo ad un prodotto diretto di un numero finito di anelli semplici artiniani, di guisa che, se $R = R_1 \times \cdots \times R_k$, risulta $R^A = R_1^A \times \cdots \times R_k^A$ e quindi ogni ideale di R^A è del tipo

$$J_1 \times \cdots \times J_k \quad , \quad J_1 \trianglelefteq R_1^A , \cdots , J_k \trianglelefteq R_k^A .$$

Poiché del resto R_i ($i = 1 , \cdots , k$) è un anello semplice artiniano, indicata con ψ_i la corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei filtri su A e gli ideali di R_i^A, risulta $J_i = \psi_i(\mathfrak{F}_i)$ ($\mathfrak{F}_i$ indicando un filtro su A), di guisa che gli ideali di R^A sono tutti e soli del tipo

$$\psi_1(\mathfrak{F}_1) \times \cdots \times \psi_k(\mathfrak{F}_k).$$

Parte III. – Sui problemi di permanenza in un ultraprodotto di proprietà dei fattori.

5. Nella II parte del presente lavoro, esaminando il problema della biunivocità della corrispondenza ψ, ci siamo ricondotti in sostanza al problema della permanenza della «semplicità» in un ultraprodotto di anelli. Poiché il problema generale della permanenza di una proprietà degli anelli R_α in un loro ultraprodotto presenta notevole interesse (N. I. Herstein [3], S. Kochen [4], G. Santosuosso [7]), ci soffermiamo ulteriormente sull'argomento.

Cominciamo col provare che:

5.1. *Un ultraprodotto di anelli locali (ossia commutativi, unitari e con un solo ideale massimale) è ancora un anello locale, ed il suo ideale massimale è l'ultraprodotto degli ideali massimali dei singoli anelli.*

Dimostrazione. – Diciamo L_α ($\alpha \in A$) gli anelli locali in questione, ed indichiamo con M_α l'ideale massimale di L_α. Denotiamo inoltre con L un ultraprodotto degli anelli L_α, $L = \prod_{\alpha \in A} L_\alpha/\mathfrak{F} = \mathfrak{L}/\mathfrak{F}$ e con M l'ideale di L immagine di $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha/\mathfrak{F} = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha / \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \cap \psi(\mathfrak{F})$ nell'ovvia immersione canonica $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha/\mathfrak{F} \to L$; proveremo che M è ideale massimale di L e che, come tale, esso è unico.

La prima parte si dimostra provando che, se $[x] , [y] \in L$ ($x , y \in \mathfrak{L}$, $[x] = x + \psi(\mathfrak{F})$) sono non invertibili (vale a dire che gli insiemi C_x , C_y degli indici α per cui rispettivamente x_α , y_α sono non invertibili non appartengono ad $\mathfrak{F}$), allora anche $[x] - [y]$ è non invertibile.

Supponiamo per assurdo che risulti:

5.2. $(x_\alpha - y_\alpha) r_\alpha = 1_\alpha$ (1_α indicando l'unità di L_α) per $\alpha \in \bar{A} \in \mathfrak{F}$. Se x_α non è invertibile tale è anche $x_\alpha r_\alpha$ e, poiché L_α è locale, dalla 3.2 si trae l'invertibilità di $y_\alpha r_\alpha$ e quindi di y_α.

Indichiamo allora con X l'insieme degli indici $\alpha \in \bar{A}$ per i quali x_α non è invertibile (e quindi y_α è invertibile), con Y l'insieme degli indici $\alpha \in \bar{A}$

per i quali y_α non è invertibile (e quindi x_α è invertibile), con Z l'insieme degli indici per i quali x_α ed y_α sono entrambi invertibili.

Risulta chiaramente $\bar{A} = X \cup Y \cup Z$, con X, Y, Z disgiunti a due a due e $A - (X \cup Z) = Y \cup (A - \bar{A})$, di guisa che – $\mathfrak{F}$ essendo un ultrafiltro – una (ed una sola) delle eventualità

$$X \cup Z \in \mathfrak{F} \ , \ Y \cup (A - \bar{A}) \in \mathfrak{F}$$

dev'essere verificata. Ma la prima è assurda, poiché – qualora essa valesse – in $X \cup Z$ le componenti di y sarebbero invertibili e riuscirebbe quindi y invertibile, contrariamente al supposto. Se poi invece fosse $Y \cup (A - \bar{A}) \in \mathfrak{F}$ si trarrebbe $[Y \cup (A - \bar{A})] \cap \bar{A} = Y \in \mathfrak{F}$, ed in Y le componenti di x risulterebbero invertibili, il che ancora non può essere.

Per dimostrare la II parte basta provare che M è la totalità degli elementi non invertibili di L, vale a dire che, se $[x]$ non è invertibile in L, esiste un elemento $y \in \mathfrak{L}$ tale che $y - x \in \psi(\mathfrak{F})$ e $y \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$. Indichiamo con C'_x l'insieme degli indici α per i quali x_α è invertibile ($C'_x \notin \mathfrak{F}$); risulta $A - C'_x \in \mathfrak{F}$ e per ogni $\alpha \in A - C'_x$ x_α non è invertibile ed appartiene quindi ad M_α. Basta dunque porre

$$y_\alpha = 0 \quad \alpha \in C'_x \quad , \quad y_\alpha = x_\alpha \quad \alpha \in A - C'_x$$

per ottenere un elemento y del tipo richiesto.

6. Vogliamo ora rispondere ad un'ulteriore questione: qualora ci si limiti a considerare anelli locali che siano noetheriani, il precedente teorema continua a sussistere, vale a dire, la « noetherianeità » si conserva negli ultraprodotti?

Le risposta è negativa, come mostra il seguente enunciato:

6.1. *Se* $R_\alpha = R$, *ove* α *varia in un insieme* A *numerabile ed* R *è un anello noetheriano integralmente chiuso tale che l'insieme dei suoi divisori di* O *è propriamente contenuto nell'insieme degli elementi non invertibili, l'anello* $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha/\mathfrak{F} = R^A/\mathfrak{F}$ (*ove* $\mathfrak{F}$ *indica un ultrafiltro non principale su* A) *è un anello non noetheriano.*

Dimostrazione. – Supponiamo dapprima che R sia un anello noetheriano locale e regolare 1-dimensionale (tale cioè che il suo ideale massimale M è principale e di rango 1). Stante il 5.1 $R^A/\mathfrak{F}$ è locale, ed ammette come ideale massimale l'ideale $M^A/\mathfrak{F}$ (nel senso precedentemente precisato); se $R^A/\mathfrak{F}$ fosse noetheriano, esso sarebbe allora anche regolare ed 1-dimensionale (infatti $M^A/\mathfrak{F}$ è esso stesso principale e $R^A/\mathfrak{F}$ è un dominio poiché R è un dominio; $M^A/\mathfrak{F}$ risulta generato da $[f']$ se f è un generatore di M ed f' la sua immagine nell'applicazione diagonale $R \to R^A$).

In virtù di un teorema generale di Auslander–Buchsbaum (S. Mac Lane [5]), $R^A/\mathfrak{F}$ risulterebbe un dominio a fattorizzazione unica, come del resto R stesso; proveremo invece tra breve che un'*ultrapotenza* propria $R^A/\mathfrak{F}$

di un dominio a fattorizzazione unica (diverso da un campo) non è un dominio a fattorizzazione unica.

Mostriamo preliminarmente come, dal caso che R sia locale e regolare 1–dimensionale, si possa risalire facilmente al caso generale. Consideriamo all'uopo un ideale primo rilevante $P \lhd R$ (vale a dire un ideale primo P di R di rango 1 e contenente almeno un elemento b non divisore di O) e quindi l'anello R_P risultante dalla localizzazione di R a P (vale a dire l'anello generalizzato dei quozienti di R rispetto a P; cfr. O. Zariski [8]). R_P risulta un anello noetheriano locale regolare 1–dimensionale (D. G. Northcott [6]) e quindi, per quanto precedentemente visto, $R_P^A/\mathfrak{F}$ non è noetheriano. Del resto la localizzazione di $R^A/\mathfrak{F}$ rispetto a $P^A/\mathfrak{F}$ (che è ancora un ideale primo di $R^A/\mathfrak{F}$) è un anello isomorfo all'anello $R_P^A/\mathfrak{F}$ (G. Santosuosso [7]); quest'ultimo non è noetheriano epperò $R^A/\mathfrak{F}$ è esso stesso non noetheriano.

Proviamo che, come annunciato:

6.2. *Se* $R_\alpha = R$, *ove* α *varia in un insieme numerabile* A, *ed* R *è un dominio a fattorizzazione unica* (*diverso da un campo*), *allora* $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha/\mathfrak{F} = R^A/\mathfrak{F}$ *è un dominio non a fattorizzazione unica,* $\mathfrak{F}$ *indicando al solito un ultrafiltro non principale su* A.

Dimostrazione. – Decomponiamo A in un'infinità numerabile di sottoinsiemi tutti non appartenenti ad $\mathfrak{F}$ (ad esempio finiti)

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots (A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{se } i \neq j).$$

Indicato con p un elemento primo di R, consideriamo l'elemento $x \in R^A$ così definito

$$x_\alpha = p \quad \alpha \in A_1 \quad , \quad x_\alpha = p^2 \quad \alpha \in A_2 , \cdots .$$

È evidente che $[x] \in R^A/\mathfrak{F}$ non ammette ivi una fattorizzazione; infatti, se sussistesse la relazione

$$[x] = [p_1] \cdots [p_t]$$

con $[p_i]$ primo in $R^A/\mathfrak{F}$, avremmo allora

$$x_\alpha = p_{1,\alpha} \cdots p_{t,\alpha} \tag{6.3}$$

per $\alpha \in \bar{A} \in \mathfrak{F}$. Se poi $[p_i]$ è primo in $R^A/\mathfrak{F}$ allora $p_{i,\alpha}$ è primo in R per $\alpha \in \bar{A}_i \in \mathfrak{F}$, e la 6.3 sussisterebbe dunque per ogni indice $\alpha \in B = \bar{A} \cap \left[\bigcap_{i=1}^{t} \bar{A}_i \right] \in \mathfrak{F}$, e basta che sia $\alpha \in B \cap A_k$ con $k > t$ per avere l'assurdo (si osservi che $B \cap A_k$ è certo non vuoto per qualche $k > t$).

7. Osserviamo che i teoremi 6.1 e 6.2 continuano a sussistere per un insieme infinito A qualunque sotto la sola condizione che una decomposizione di A del tipo usato nella dimostrazione del 6.2 esista.

Ciò accade certamente se $\mathfrak{F}$ contiene una parte numerabile; si noti del resto che ultrafiltri su A che contengono una parte numerabile (e non sono principali) esistono certamente, come prova la seguente osservazione:

7.1. *Se* A *è un insieme infinito esistono ultrafiltri non principali su* A *contenenti una parte numerabile.*

Dimostrazione. – Sia infatti $B \subseteq A$ una parte numerabile di A. Consideriamo il filtro costituito dai seguenti elementi:

a) gli elementi del filtro generato da B;

b) gli elementi di un ultrafiltro non principale su B;

c) le parti di A che intersecano B esattamente in un elemento dell'ultrafiltro di cui sopra.

È immediato stabilire che si tratta di un ultrafiltro su A e che tale ultrafiltro è non principale (è ovvio altresì che ogni ultrafiltro non principale che contiene B si può realizzare in tal modo).

Si noti che viceversa se A è un insieme infinito non numerabile esistono certi ultrafiltri (non principali) su A che non contengono alcuna parte numerabile di A. Si pensi che la famiglia dei complementari delle parti discrete di A soddisfa la proprietà delle intersezioni finite; un ultrafiltro che la contenga gode dunque della proprietà in questione.

8. Accenniamo infine al problema inverso a quello di cui ci siamo occupati in questa III parte.

Supponiamo che ogni ultraprodotto proprio della famiglia di anelli $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A insieme infinito) goda di una certa proprietà $\mathfrak{P}$; è evidente che un numero finito di anelli R_α possono non godere di tali proprietà. Ci chiediamo per quali proprietà accada però che *solo un numero finito* di anelli facciano eccezione.

Si dimostra facilmente che la proprietà commutativa, l'essere un campo o un anello di integrità sono tali. Mostriamo piuttosto che tale è anche la semplicità, giacché:

8.1. *Se* $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha/\mathfrak{F} = R/\mathfrak{F}$ *è semplice qualunque sia l'ultrafiltro non principale* $\mathfrak{F}$, *gli anelli* R_α *che non sono semplici sono in numero finito.*

Dimostrazione. – Supponiamo per assurdo che la totalità degli indici α per cui R_α non è semplice sia un insieme infinito $B \subseteq A$.

Esiste certo qualche ultrafiltro non principale $\mathfrak{F}$ contenente B, ed è evidente che $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha/\mathfrak{F} \simeq \prod_{\alpha \in B} R_\alpha/\mathfrak{F}'$ ($\mathfrak{F}'$ è l'ultrafiltro su B ottenuto per sezione da $\mathfrak{F}$; i suoi elementi, sono i sottoinsiemi di B del tipo $B \cap \bar{A}$, al variare di $\bar{A} \in \mathfrak{F}$). Basterà dunque provare che se ogni ultraprodotto proprio $R/\mathfrak{F}$ è semplice allora esiste qualche anello R_α semplice. Ove così non fosse, potremmo determinare per $\forall \alpha \in A$ un ideale $0 \neq J_\alpha \lhd R_\alpha$. Costruito $\prod_{\alpha \in A} J_\alpha$, l'ideale J' di $R/\mathfrak{F}$ immagine di $\prod_{\alpha \in A} J_\alpha$ nella proiezione canonica $R \to R/\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$ indichi un ultrafiltro non principale qualunque) è certo non banale, dal che la conclusione.

Si noti esplicitamente che, usando di 8.1, si ha il seguente teorema, che generalizza il 3.3:

8.2. *Se gli anelli* R_α *sono unitari ed ogni loro ultraprodotto proprio è semplice, ogni ideale di* $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ *è del tipo*

$$J_1 \times \cdots \times J_k \times \psi(\mathfrak{F}) \quad , \quad J_i \trianglelefteq R_{\alpha_i} ,$$

ove $\mathfrak{F}$ *indichi un filtro su* $A - \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ *siano gli indici corrispondenti ad anelli della famiglia che non sono semplici (se non esistono tali anelli un tale ideale è del tipo* $\psi(\mathfrak{F})$ *ove* $\mathfrak{F}$ *indichi un filtro su* A),

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. 3, 2ª ed. (1963).

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 1, 3ª ed. (1961).

[3] N. I. Herstein, *Topics in ring theory*, «Math. Lecture Notes» (1965).

[4] S. Kochen, *Ultraproducts in the theory of models*, «Ann. of Math.» (2), 74, 221–261 (1961).

[5] S. Mac Lane, *Homology*. Springer-Verlag, Berlin 1967.

[6] D. G. Northcott, *Ideal theory*. Hodge, Cambridge 1953.

[7] G. Santosuosso, *Sul trasporto ad un ultraprodotto di anelli di proprietà dei suoi fattori*, «Rend. Mat.» (6), *1*, 82–100 (1968).

[8] O. Zariski, *Commutative algebra*, I vol. Van Nostrand, Princeton 1965.