Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosa Maria Bianchini, Maria Grandolfi

Trasformazioni di tipo contrattivo generalizzato in uno spazio metrico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 212–216.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_212_0>

Analisi matematica. — *Trasformazioni di tipo contrattivo generalizzato in uno spazio metrico* (*). Nota di ROSA MARIA BIANCHINI e MARIA GRANDOLFI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In this paper the authors prove some fixed-point theorems for mappings which generalize the contractive ones. Moreover some convergence criteria for successive approximations are given.

INTRODUZIONE.

Come è noto si chiama contrazione in uno spazio metrico (X, d) una trasformazione T, se esiste un $K \in [0, 1[$ tale che

$$d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y) \qquad x, y \in X \tag{1}$$

Trasformazioni soddisfacenti una condizione del tipo

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \qquad x, y \in X \tag{2}$$

più generale della (1) (che corrisponde a $\psi(r) = Kr$) sono state considerate di recente da F. Browder [1] nell'ipotesi che (X, d) sia completo e sotto opportune condizioni sulla funzione $r \to \psi(r)$, allo scopo di dare teoremi di convergenza della successione delle iterate e di esistenza di punti uniti.

La convergenza delle iterate e l'esistenza di punti uniti per trasformazioni del tipo (2) è provata (Teorema 1, Teorema 2, Teorema 3) nel presente lavoro sotto ipotesi diverse da quelle di F. Browder ma che includono ugualmente le trasformazioni di tipo contrattivo.

1. – Sia (X, d) uno spazio metrico, M un sottoinsieme non vuoto di X, T una trasformazione di M in sé. A partire da $x^0 \in M$ definiamo la successione di iterate

$$x_0 = x^0$$

$$x_{n+1} = Tx_n = T^n x^0$$

Se accade che

$$d(T^n x^0, T^{n+1} x^0) \leq \alpha_n$$

con α_n tale che $\sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha_n < +\infty$, allora la successione $\{T^n x^0\}$ è di Cauchy; infatti:

$$d(T^n x^0, T^{n+p} x^0) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(T^{n+i} x^0, T^{n+i+1} x^0) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{n+i}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1967–68 (Gruppo n. 11).

(**) Nella seduta del 19 novembre 1968.

Prendendo in particolare $\alpha_n = c_n\, d(x^0, Tx^0)$ con la condizione che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty$ si ottiene un teorema di R. Caccioppoli [2]: se T è una contrazione allora $c_n = k^n$. Se invece $\alpha_n = \lambda^n\, d(T^n x^0, T^{n+1} x^0)$ con la condizione che $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, d(T^n x^0, T^{n+1} x^0) < +\infty$ e $\lambda \in [1, +\infty[$ si ottiene un risultato dimostrato per $\lambda \in]1, +\infty[$ da M. G. Maia [3] (1).

Se consideriamo ora trasformazioni del tipo (2) con l'ipotesi che la funzione $r \to \psi(r)$ sia monotona non decrescente, abbiamo:

$$d(T^n x^0, T^{n+1} x^0) \leq \psi(d(T^{n-1} x^0, T^n x^0)) \leq \psi^n(d(x^0, x_1)),$$

dove $\psi^1(r) = \psi(r)$, $\psi^2(r) = \psi(\psi(r)), \cdots$ da cui segue:

TEOREMA 1. – *Sia $r \to \psi(r)$ una funzione reale, definita per $r \geq 0$ non decrescente, tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r) < +\infty$. Sia (X, d) uno spazio metrico completo,* M *un sottoinsieme non vuoto di* X, T *una trasformazione di* M *in sé tale che*:

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \tag{2}$$

allora qualunque sia $x^0 \in M$, la successione delle iterate $\{T^n x^0\}$ converge verso un punto $y \in X$, indipendente da x^0 e non necessariamente di M. *Inoltre se*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi^i(d(x^0, Tx^0)) = S(x^0)$$

abbiamo:

$$d(T^n x^0, y) \leq \psi^n(S(x^0)). \tag{*}$$

(1) Nell'ipotesi che $\lambda \in]1, +\infty[$ M. G. Maia dimostra che:

$$\delta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, d(T^n x, T^n y)$$

è una metrica maggiorante la metrica d, (ossia $d(x, y) \leq \delta(x, y)$ per ogni $x, y, \in X$) e che rispetto a δ la trasformazione T risulta una contrazione. Si può tuttavia notare che la condizione che esista un $\lambda \in]1, +\infty[$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d(T^n x^0, T^{n+1} x^0)$ risulta convergente è una condizione non solo sufficiente, ma anche necessaria perché esista in X una metrica δ maggiorante la metrica d e rispetto alla quale T risulti una contrazione. Infatti se $d(x, y) \leq \delta(x, y)$ e $\delta(Tx, Ty) \leq K\, \delta(x, y)$ con $K \in [0, 1[$, abbiamo:

$$d(T^n x, T^n y) \leq \delta(T^n x, T^n y) \leq K\, \delta(T^{n-1} x, T^{n-1} y) \leq K^n\, \delta(x, y).$$

Se prendiamo ora due numeri $\alpha, \beta \in [0,1[$ tali che $\alpha\beta = K$ abbiamo:

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n \beta^n\, \delta(x, y)$$

cioè: $\frac{1}{\alpha^n} d(T^n x, T^n y) \leq \beta^n (x, y)$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n d(T^n x, T^n y)$, essendo minorante di una serie geometrica di ragione $\beta < 1$, risulta convergente.

Dimostrazione. – Per quanto detto sopra la successione $\{T^n x^0\}$ è di Cauchy ed, essendo lo spazio X completo, convergerà verso un $y \in X$. Vediamo ora che y è indipendente dal punto x^0; infatti se: $T^n x^0 \to y$ e $T^n z^0 \to t$:

$$d(y, t) = \lim_n d(T^n x^0, T^n z^0) \le \lim_n \psi^n (d(x^0, z^0)) = 0 .$$

Per quanto riguarda l'errore abbiamo:

$$d(T^n x^0, T^{n+p} x^0) \le \psi(d(T^{n-1} x^0, T^{n+p-1} x^0)) \le \psi^n (d(x^0, T^p x^0)) \le$$

$$\le \psi^n \left(\sum_{i=0}^{p-1} d(T^i x^0, T^{i+1} x^0) \right) \le \psi^n \left(\sum_{i=0}^{p-1} \psi^i (d(x^0, Tx^0)) \right) \le \psi^n (S(x^0))$$

e per $p \to \infty$ la (*) è dimostrata.

Osservazione 1. – L'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r)$ porta che: $\lim_{r \to 0+} \psi(r) = 0$. Infatti essendo la $\psi(r)$ non decrescente $\lim_{r \to 0+} \psi(r) = \inf_{r>0} \psi(r) = L$. Se per assurdo L fosse maggiore di zero avendosi $\psi(r) \ge L$ per $r \neq 0$ e quindi $\lim_n \psi^n(r) \ge L$ per $r \neq 0$ si avrebbe $\lim_n \psi^n(r) \neq 0$ che è in contraddizione con l'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r)$.

Per l'ipotesi (2) la trasformazione T è uniformemente continua; infatti per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che se $0 < r < \delta$, $\psi(r) < \varepsilon$ per quanto detto sopra e quindi:

$$d(Tx, Ty) \le \psi(d(x, y)) < \varepsilon \qquad \forall (x, y) \qquad \text{tale che} \quad d(x, y) < \delta$$

Se quindi M è chiuso il Teorema 1 assicura l'esistenza di un punto unito per la T oltre la convergenza della successione delle iterate.

Se M non è necessariamente chiuso, essendo la T uniformemente continua si può estendere in uno e un solo modo con continuità alla chiusura di M e quindi y sarà punto unito di questa estensione $\bar{T}$. Inoltre la trasformazione $\bar{T}$ non può avere più di un punto unito in M; infatti se esistesse $x \in M$ ed $y \in M$ tali che $x = \bar{T}x$, $y = \bar{T}y$ si avrebbe:

$$d(x, y) = d(\bar{T}x, \bar{T}y) \le \psi(d(x, y)) = \psi(d(\bar{T}x, \bar{T}y)) \le \psi^2(d(x, y)) \le \cdots$$

$$\cdots \le \psi^m(d(x, y)) \qquad \forall\, m \text{ intero}$$

ed essendo $\lim_m \psi^m(d(x, y)) = 0$, ne viene $d(x, y) = 0$.

Osservazione 2. – Il teorema resta valido se esiste un intero k tale che la T, ferme restando le altre ipotesi, soddisfi invece della (2) la seguente:

$$(2') \qquad d(T^{k+1} x, T^k x) \le \psi(d(T^k x, T^{k-1} x)) \qquad \forall x \in M$$

che è evidentemente più generale. In questo caso però la (2′) non assicura la continuità della trasformazione T, né l'unicità dell'eventuale punto unito.

Osservazione 3. – Le trasformazioni contrattive soddisfano le ipotesi del teorema. Infatti se $K \in [0, 1[$ la funzione $\psi(r) = Kr$ è non decrescente e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} K^n r < +\infty$ per $\forall r \geq 0$.

2. – L'ipotesi di non decrescenza posta sulla $\psi(r)$ porta che, se $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(\bar{r}) < +\infty$, sarà anche $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r) < +\infty$ per ogni $r < \bar{r}$. Infatti da $r < \bar{r}$ segue che $\psi^n(r) \leq \psi^n(\bar{r})$. Pertanto poniamo:

$$R = \sup \left\{ r > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r) < +\infty \right\}.$$

TEOREMA 2. – *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo,* T *una trasformazione di* X *in sé. Se esiste una funzione* $\psi(r)$ *non decrescente definita per* $r \geq 0$ *tale che:* $\psi(r) \leq r$ *e posto:*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r) < +\infty \right\}$$

se la trasformazione T *è tale che:*

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \qquad \forall x, y \in X \text{ tali che } d(x, y) \leq R$$

allora se esiste un $x^0 \in X$ *tale che* $d(x^0, Tx^0) < R$, *la successione delle iterate* $\{T^n x^0\}$ *converge verso un punto unito per la* T.

Dimostrazione. – Osserviamo che se $d(T^n x^0, T^{n-1} x^0) < R$, allora $d(T^{n+1} x^0, T^n x^0)$ è minore di R. Infatti:

$$d(T^n x^0, T^{n+1} x^0) \leq \psi(d(T^{n-1} x^0, T^n x^0)) \leq d(T^{n-1} x^0, T^n x^0).$$

Sia ora $x^0 \in X$ tale che $d(x^0, Tx^0) < R$. Per quanto detto sopra abbiamo che:

$$d(T^k x^0, T^{k+1} x^0) \leq \psi^k(d(x^0, Tx^0))$$

per cui seguendo lo stesso procedimento del Teorema 1 si dimostra che $\{T^n x^0\} \to y \in X$ e quindi y è punto unito per la T.

Osservazione 1. – In generale non è detto che il punto y sia l'unico punto unito della trasformazione T, però, essendo $\psi(r) < r$ per $0 < r < R$, nella sfera di centro y e raggio R non vi sono altri punti uniti per la trasformazione T.

3. – Fin'ora non si è fatta nessuna ipotesi di limitatezza sull'insieme M, né sulla successione delle iterate.

Consideriamo ora una trasformazione $T: M \to M$ tale che soddisfi la (2). Definita come al solito la successione $\{T^n x^0\}$ abbiamo:

$$d(T^{n+p} x^0, T^n x^0) \leq \psi^n(d(x^0, T^p x^0))$$

nell'ipotesi che ψ sia monotona non decrescente.

TEOREMA 3. – *Sia* $r \to \psi(r)$ *una funzione reale definita per* $r \geq 0$. *monotona non decrescente tale che esista un* $\bar{r}$ *per cui* $\lim_n \psi^n(\bar{r}) = 0$. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo ed* M *un sottoinsieme non vuoto di* X. *Se* T *è una trasformazione di* M *in sé, tale che*:

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \tag{2}$$

ed esiste un $x^0 \in M$ *tale che* $d(T^n x^0, x^0) \leq L$, *per ogni n intero, con* $L \leq K$, *dove* $K = \sup\{r : \lim \psi^n(r) = 0\}$, *allora la successione di iterate* $\{T^n x^0\}$ *converge verso un* $y \in X$ *e si ha*:

$$d(y, T^n x^0) \leq \psi^n(L)$$

Dimostrazione. – Essendo $\psi(r)$ monotona non decrescente si ha che se $0 \leq r < K$:

$$0 \leq \psi^n(r) \leq \psi^n(K)$$

e quindi $\lim_n \psi^n(r) = 0$.

Inoltre:

$$d(T^{n+p} x^0, T^n x^0) \leq \psi^n(d(T^p x^0, x^0)) \leq \psi^n(L)$$

ed essendo $\lim_n \psi^n(L) = 0$ se ne deduce che $\{T^n x^0\}$ è una successione di Cauchy ed inoltre:

$$d(y, T^n x^0) = \lim_p d(T^{n+p} x^0, T^n x^0) \leq \psi^n(L).$$

Osservazione 1. – Questo teorema include il Teorema 1 di F. E. Browder [1]. Infatti se $\psi(r) < r$ per $r > 0$, la successione $\{\psi^n(r)\}$ qualunque sia r è monotona non crescente e quindi esiste il $\lim_n \psi^n(r) = l$.

D'altra parte se si suppone che $\psi(r)$ sia continua a sinistra si ha:

$$\psi(l) = \lim_n \psi^{n+1}(r) = l$$

e, per le ipotesi fatte, questo si può verificare solo se $l = 0$.

Quindi nell'ipotesi del Teorema di F. E. Browder $K = +\infty$ ed, avendo supposto M limitato, ne viene che, comunque si prenda $x^0 \in M$, $\{T^n x^0\}$ è convergente.

Durante la correzione delle bozze siamo venute a conoscenza dell'articolo di W. C. RHEINBOLDT, *A unified convergence theory for a class of iterative processes*, « SIAM J. Numer. Anal. », 5, 42–63 (1968), nel quale vengono considerate trasformazioni di tipo contrattivo più generali delle nostre. Tuttavia, la tecnica da noi usata è diversa e le ipotesi da noi introdotte appaiono di più facile verifica di quelle del Rheinboldt.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. E. BROWDER, *On the convergence of successive approximations for non linear functional equations*, « Indagationes Math. », *30*, 27–35 (1968).

[2] R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi–uniti in una trasformazione funzionale*, « Atti Accademia Naz. Lincei », (6), *11*, 794–99 (1930).

[3] M. G. MAIA, *Un'osservazione sulle contrazioni metriche*, « Rend. del seminario matematico dell'Univ. di Padova », *40*, 139–43 (1968).