Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Giacomo Tricomi

Sulla teoria dei polinomi ortogonali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 195–199.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 19 novembre 1968

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Sulla teoria dei polinomi ortogonali.* Nota [(*)] del Socio FRANCESCO GIACOMO TRICOMI.

SUMMARY. — Two new relations between the 9 main constants of the theory of the « classic » orthogonal polynomials and simplified deductions for the differential equation and the differentiation formulae of the same.

1. – Nelle mie *Vorlesungen über Orthogonalreihen* (Berlin, Springer, 1955) è contenuta una trattazione dei polinomi ortogonali cosiddetti « classici » (cioè di quelli di Legendre, Jacobi, Laguerre, Hermite, ecc.) che ha carattere di originalità, in quanto per la prima volta le principali proprietà di questi polinomi sono dedotte in modo *unitario*, traendole dalla loro generazione (pure nuova) per mezzo della formula di *Rodriguez generalizzata*:

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n\, p(x)}\, \mathfrak{D}^n\, [p(x)\, X^n]\,, \tag{1}$$

dove $\mathfrak{D}$ è il simbolo di derivazione,

$$P_n(x) = k_n\, x^n + k'_n\, x^{n-1} + \cdots$$

è l'*n-esimo* polinomio ortogonale della famiglia considerata, $p(x)$ la funzione-peso che figura nella formula di ortogonalità [in un certo intervallo fondamentale $(a\,,b)$], X un polinomio al più di secondo grado e K_n una costante.

I capisaldi di tale trattazione sono la formula di ricorrenza

$$P_{n+1}(x) = (A_n\, x + B_n)\, P_n(x) - C_n\, P_{n-1}(x), \tag{2}$$

l'equazione differenziale di 2° ordine per $P_n(x)$

$$X P''_n(x) + K_1\, P_1(x)\, P'_n(x) + \lambda_n\, P_n(x) = 0 \tag{3}$$

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1968.

e la formula di derivazione di $P_n(x)$

$$XP'_n(x) = \left(\frac{n}{2}X''x + \alpha_n\right)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) \quad , \tag{4}$$

dove A_n , B_n , C_n , λ_n , α_n , β_n sono (accanto a K_n , k_n e k'_n) altre 6 importanti costanti fra cui si conoscevano già le relazioni

$$\left\{\begin{array}{l} A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad , \quad B_n = A_n\left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n}\right) \quad , \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{h_n}{h_{n-1}} \\ \lambda_n = -n\left(K_1 k_1 + \frac{n-1}{2}X''\right) \\ \alpha_n = n\,X'(0) - \frac{1}{2}\frac{k'_n}{k_n}X'' \quad , \quad \beta_n = -\frac{C_n}{A_n}\left(K_1 k_1 + \frac{2n-1}{2}X''\right) \end{array}\right. \tag{5}$$

essendo h_n il *fattore di normalizzazione* di $P_n(x)$:

$$h_n = \int_a^b p(x)\,[P_n(x)]^2\,dx = (-1)^n\frac{n!\,k_n}{K_n}\int_a^b p(x)\,X^n\,dx. \tag{6}$$

Nella presente Nota faccio conoscere due nuove relazioni (che posseggo già da un paio d'anni) fra le precedenti costanti, e precisamente:

$$A_n = \frac{K_n}{K_{n+1}}\;\frac{(c+nX'')\left(c+\frac{2n-1}{2}X''\right)}{c+\frac{n-1}{2}X''} \tag{7}$$

e

$$\frac{k'_n}{k_n} = n\,\frac{c'+(n-1)\,X'(0)}{c+(n-1)\,X''}\,, \tag{8}$$

avendo posto per brevità

$$K_1 k_1 = K_1 P'_1(x) = c \quad , \quad K_1 k'_1 = K_1 P_1(0) = c'. \tag{9}$$

Inoltre indico dei procedimenti un pò più semplici di quelli seguiti nelle *Vorlesungen* per la deduzione delle precedenti (3) e (4), nonché una nuova formula di derivazione: la (13), collegante P'_n a P_n e P_{n+1} invece che a P_n e P_{n-1}.

Utilizzando questi nuovi risultati, per calcolare le 9 costanti relative ad una certa famiglia di polinomi « classici » basterà quindi conoscere – oltre ad X ed al fattore di normalizzazione h_n – la costante K_n della formula di Rodriguez e i coefficienti (9) del polinomio di primo grado:

$$K_1 P_1(x) = X' + \frac{p'(x)}{p(x)}X = cx + c'. \tag{10}$$

2. – Come prima cosa esporrò la deduzione semplificata dell'equazione differenziale (3), per lo che si comincia con l'osservare che, essendo X un polinomio al più di 2° grado, per la formula di Leibniz e per la (1) potrà porsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{n+1}[X\mathfrak{D}(pX^n)] &= X\mathfrak{D}^{n+2}(pX^n) + \binom{n+1}{1}X'\mathfrak{D}^{n+1}(pX^n) + \binom{n+1}{2}X''\mathfrak{D}^n(pX^n) = \\ &= K_n\left[X\mathfrak{D}^2(pP_n) + (n+1)\,X'\mathfrak{D}(pP_n) + \frac{1}{2}n\,(n+1)\,X''pP_n\right].\end{aligned}$$

D'altra parte può pure scriversi che

$$\mathfrak{D}^{n+1}[X\mathfrak{D}(pX^n)]=\mathfrak{D}^{n+1}\{X\mathfrak{D}[(pX)\cdot X^{n-1}]\}=\mathfrak{D}^{n+1}[X^n\mathfrak{D}(pX)+(n-1)X^n pX']=$$
$$=\mathfrak{D}^{n+1}[X^n K_1 pP_1+(n-1)X'pX^n]=\mathfrak{D}^{n+1}\{[K_1 P_1+(n-1)X']pX^n\}$$

donde, essendo $K_1 P_1 + (n-1) X'$ un polinomio di 1° grado, con una nuova applicazione della formula di Leibniz e della (1), segue

$$\mathfrak{D}^{n+1}[X\mathfrak{D}(pX^n)] = [K_1 P_1 + (n-1) X']\,\mathfrak{D}^{n+1}(pX^n) +$$
$$+ (n+1)[c + (n-1) X'']\,\mathfrak{D}^n(pX^n) = K_n\{[K_1 P_1 + (n-1) X']\,\mathfrak{D}(pP_n) +$$
$$+ (n+1)[c + (n-1) X'']\,pP_n\}.$$

Confrontiamo ora i due risultati ciò che, con ovvie semplificazioni, dà luogo all'equazione

$$X\mathfrak{D}^2(pP_n) + (2X' - K_1 P_1)\,\mathfrak{D}(pP_n) - (n+1)\left(c + \frac{n-2}{2}X''\right)pP_n = 0$$

donde, con facili calcoli, segue

$$XP_n'' + \left(2X\frac{p'}{p} + 2X' - K_1 P_1\right)P_n' +$$
$$+\left[X\frac{p''}{p} + (2X' - K_1 P_1)\frac{p'}{p} - (n+1)\left(c + \frac{n-2}{2}X''\right)\right]P_n = 0.$$

Ciò posto osserviamo che dalla (10) si trae che

$$X\frac{p'}{p} = K_1 P_1 - X',$$

mentre, derivando l'uguaglianza

$$\mathfrak{D}(pK) = K_1 pP_1$$

si ha che

$$p'' X + 2p' X' + pX'' = K_1(p' P_1 + pP_1')$$

cioè che

$$X\frac{p''}{p} = (K_1 P_1 - 2X')\frac{p'}{p} + c - X'';$$

non resta dunque che sostituire questi valori nei coefficienti della precedente equazione differenziale per ottenere, con brevi calcoli, l'uguaglianza

$$XP_n'' + K_1 P_1 P_n' - n\left(c + \frac{n-1}{2}X''\right)P_n = 0,$$

che non è altro che l'equazione differenziale (3) col valore di λ_n dato dalla quarta delle (5). Essa può essere anche scritta sotto la forma autoaggiunta

$$\mathfrak{D}(pXP_n') + \lambda_n pP_n = 0. \tag{12}$$

3. – Con metodi analoghi si possono trovare le due importanti formule fornenti la derivata prima $P_n'(x)$, di cui una è la (4) mentre l'altra dà XP_n' come una combinazione lineare di P_n e P_{n+1}.

A questo scopo, cominciando dalla seconda formula, calcoliamoci in due modi diversi la derivata $(n+1)$-*esima* della quantità:

$$pX^{n+1} = pX\cdot X^n = X\cdot pX^n,$$

ciò che conduce alle due uguaglianze seguenti

$$K_{n+1}\,pP_{n+1} = \mathfrak{D}^n[\mathfrak{D}\,(pX\cdot X^n)] = \mathfrak{D}^n[(K_1\,P_1 + nX')\,pX^n] =$$
$$= (K_1\,P_1 + nX')\,\mathfrak{D}^n(pX^n) + n\,(c + nX'')\,\mathfrak{D}^{n-1}\,(pX^n) =$$
$$= K_n\,(K_1\,P_1 + nX')\,pP_n + n\,(c + nX'')\,\mathfrak{D}^{n-1}\,(pX^n)$$

e

$$K_{n+1}\,pP_{n+1} = \mathfrak{D}^{n+1}\,(X\cdot pX^n) = X\mathfrak{D}^{n+1}\,(pX^n) + (n+1)\,X'\mathfrak{D}^n(pX^n) +$$
$$+\binom{n+1}{2}X''\,\mathfrak{D}^{n-1}(pX^n) = K_n\,X\mathfrak{D}(pP_n) + (n+1)\,K_n\,X'pP_n + \binom{n+1}{2}X''\,\mathfrak{D}^{n-1}(pX^n).$$

Eliminiamo ora $\mathfrak{D}^{n-1}\,(pX^n)$ fra queste due uguaglianze; otterremo così

$$(c + nX'')\,K_n\,X\mathfrak{D}(pP_n) = \frac{n+1}{2}\,K_n\,[(K_1\,P_1 + nX')\,X'' - 2\,(c + nX'')\,X']\,pP_n +$$
$$+\left(c + \frac{n-1}{2}\,X''\right)K_{n+1}\,pP_{n+1}$$

che è già una formula del genere desiderato. Per renderla del tutto esplicita osserviamo che, tenendo conto della (11), si ha

$$\mathfrak{D}(pP_n) = p\left(P'_n + \frac{K_1\,P_1 - X'}{X}\,P_n\right),$$

sicché, sostituendo nella precedente uguaglianza divisa per pK_n, potrà scriversi che

$$(c + nX'')\,[XP_n + (K_1\,P_1 - X'\,P_n)] =$$
$$= \frac{n+1}{2}\,K_n\,[(K_1\,P_1 + nX')X'' - 2\,(c + nX'')\,X']\,P_n + \left(c + \frac{n-1}{2}\right)\frac{K_{n+1}}{K_n}\,P_{n+1}\,.$$

Da ciò segue subito la formula cercata, cioè:

$$XP'_n = \frac{c + \frac{n-1}{2}\,X''}{c + nX''}\left[\frac{K_{n+1}}{K_n}\,P_{n+1} - (K_1\,P_1 + nX')\,P_n\right]. \tag{13}$$

Per comprenderne l'interesse basta confrontare i coefficienti di x^{n+1} nei due membri, con che si ha

$$\frac{1}{2}\,X''\,n\,k_n = \frac{c + \frac{n-1}{2}\,X''}{c + nX''}\left[\frac{K_{n+1}}{K_n}\,k_{n+1} - (c + nX'')\,k_n\right]$$

da cui segue immediatamente

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{(c + nX'')\left(c + \frac{2n-1}{2}\,X''\right)}{c + \frac{n-1}{2}\,X''}\cdot\frac{K_n}{K_{n+1}}\,,$$

che è la nuova relazione (7) fra le principali costanti della nostra teoria.

4. – Per ottenere l'altra formula di derivazione (4), non vi è che da sostituire nella (13) a P_{n+1} il suo valore tratto dalla formula di ricorrenza (2); con che, tenendo conto dell'ultimo risultato ottenuto, si ha

$$XP'_n = \left(c + \frac{2n-1}{2}\,X''\right)\frac{1}{A_n}\,[(A_n x + B_n)\,P_n - C_n\,P_{n-1}] - \frac{c + \frac{n-1}{2}\,X''}{c + nX''}\,(K_1\,P_1 + nX')\,P_n$$

ma, tenendo conto delle (9), è

$$K_1 P_1 + nX' = (c + nX'')x + (c' + nX'(0))$$

e inoltre è

$$c + \frac{2n-1}{2}X'' - \left(c + \frac{n-1}{2}X''\right) = \frac{n}{2}X'' ;$$

dunque, dette α_n e β_n due certe costanti, pel momento indeterminate, possiamo scrivere che

$$XP'_n = \left(\frac{n}{2}X''x + \alpha_n\right)P_n + \beta_n P_{n-1}$$

che è già la (4), salvo la determinazione dei valori di α_n e β_n.

Per quel che riguarda β_n non c'è, del resto, che risalire ai calcoli precedenti, per vedere subito che è

$$\beta_n = -\left(c + \frac{2n-1}{2}X''\right)\frac{C_n}{A_n} \quad ,$$

d'accordo con l'ultima delle (5). Il valore di α_n si ottiene invece nel modo migliore confrontando i coefficienti di x^n nei due membri della precedente uguaglianza, con che si ha

$$X'(0)\,nk_n + \frac{1}{2}X''(n-1)\,k'_n = \alpha_n k_n + \frac{n}{2}X''k'_n$$

donde segue

$$\alpha_n = nX'(0) - \frac{1}{2}\frac{k'_n}{k_n}X''$$

d'accordo con la penultima delle (5). Con ciò anche la (4) è completamente dimostrata, e in modo più semplice che nelle *Vorlesungen*.

5. – Finalmente dimostriamo la nuova relazione (8), che fornisce il valore dell'importante rapporto k'_n/k_n che s'incontra ben di frequente. All'uopo non v'è che da servirsi del fatto che il coefficiente complessivo di x^{n-1} nel primo membro dell'equazione differenziale (3) deve essere nullo, ciò che conduce all'identità

$$k'_n\left[(n-1)\left(c + \frac{n-2}{2}X''\right) + \lambda_n\right] + nk_n\left[c' + (n-1)X'(0)\right] = 0$$

donde, tenendo conto del valore di λ_n dato dalla quarta delle (5), segue subito la (8).

All'atto pratico, con l'ausilio delle formule qui date, il calcolo delle costanti fondamentali di una certa famiglia di polinomi ortogonali «classici», per esempio di quelli di Jacobi, diviene quasi immediato, tranne quello del rapporto h_n/h_{n-1} dei fattori di normalizzazione, che interviene nell'espressione di C_n.

Da tal punto di vista può essere utile osservare che, se si fa intervenire nei calcoli anche il terzo coefficiente – che diremo k''_n – del generico polinomio ortogonale:

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \cdots ;$$

allora sparisce anche l'ultima difficoltà.

Infatti, confrontando i coefficienti di x^{n-1} nei due membri della formula di ricorrenza (2), si perviene agevolmente alla formula

$$\frac{k^2_{n-1}}{k_n}\,\frac{h_n}{h_{n-1}} = k'_n\left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n}\right) - k_n\left(\frac{k''_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k''_n}{k_n}\right). \tag{14}$$