Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mehmet Namik Oğuztöreli, Demetrio Mangeron

Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.3-4, p. 142–146.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_3-4_142_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Teoria dei controlli. — *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti* (*). Nota II di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI [1] e DEMETRIO MANGERON [2],[3], presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — An optimization problem for a distributed parameter system is considered. The results of the papers [2] and [3] are extended.

I. DESCRIZIONE DEL SISTEMA DI CONTROLLO. Sia S un dato sistema di controllo ad una sola dimensione, definito nell'intervallo $J \equiv \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Sia inoltre $I = [t_0, t_1]$ un intervallo temporale dato. Supponiamo che lo stato del sistema S al momento $t \in I$ sia descritto dalla $u = u(t, x; \varphi, v)$, che è una funzione ordinaria rispetto a $(t, x) \in I \times J$ ed un funzionale in $\varphi \in \Phi$ ed in $v \in V$, ove con Φ e V si sono denotati gli spazi di Banach di funzioni continue su $I \times J$ con la norma uniforme.

Più precisamente, supponiamo che sia

$$u(t, x; \varphi, v) = T_1(\varphi)(t, x) + T_2(v)(t, x), \tag{I.1}$$

per $(t, x) \in I \times J$ e $\{\varphi, v\} \in \Phi \times V$, mentre T_1 e T_2 sono certi operatori agenti rispettivamente negli spazi Φ e V e definiti tramite le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} T_1(\varphi)(t, x) &= \varphi(t, x) + \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_1(t, x; \sigma, \xi)\,\varphi(\sigma, \xi)\,d\sigma\,d\xi \\ &+ \frac{\lambda}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_2(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma_2, \xi_2)\,\varphi(\sigma_1, \xi_1)\,\varphi(\sigma_2, \xi_2)\,d\sigma_1\,d\xi_1\,d\sigma_2\,d\xi_2 \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{\lambda^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\cdots\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_n(t,x;\sigma_1,\xi_1;\cdots;\sigma_n,\xi_n)\,\varphi(\sigma_1,\xi_1)\cdots\varphi(\sigma_n,\xi_n)\,d\sigma_1 d\xi_1\cdots d\sigma_n d\xi_n \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{I.2}$$

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Department of Mathematics. The University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(2) Polytechnic Institute of Jassy. Iasi, Romania. At present Visiting professor at the University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(3) The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

e

$$\mathrm{T}_2(v)(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \mathrm{H}_1(t, x; \sigma, \xi)\, v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi$$

$$+ \frac{\mu}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \mathrm{H}_2(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma_2, \xi_2)\, v(\sigma_1, \xi_1)\, v(\sigma_2, \xi_2)\, d\sigma_1\, d\xi_1\, d\sigma_2\, d\xi_2$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{\mu^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \cdots \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \mathrm{H}_n(t, x; \sigma_1, \xi_1; \cdots; \sigma_n, \xi_n)\, v(\sigma_1, \xi_1)\cdots v(\sigma_n, \xi_n)\, d\sigma_1 d\xi_1 \cdots d\sigma_n d\xi_n$$

$$+ \cdots,$$

ove λ e μ sono parametri reali e K_n e H_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ sono funzioni continue note nelle variabili $t, x; \sigma_1, \xi_1, \sigma_2, \xi_2, \cdots, \sigma_n, \xi_n$, essendovi continuamente differenziabili rispetto a t ed x per (t, x) e per $(t, x), (\sigma_1, \xi_1), \cdots$ $\cdots, (\sigma_n, \xi_n) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$. Le serie figuranti nella (I.2) oppure nella (I.3) come pure le serie corrispondenti a $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ed a $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ sono presupposte ad essere uniformemente convergenti per $(t, x) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, $\{\varphi, v\} \in \Phi \times \mathrm{V}$, $|\lambda| < \mathrm{R}$ e $|\mu| < \mathrm{R}$, essendo R un numero positivo. Assumiamo inoltre che i nuclei $\mathrm{K}_n(t, x; \sigma_1, \xi_1; \cdots; \sigma_n, \xi_n)$ e $\mathrm{H}_n(t, x; \sigma_1, \xi_1; \cdots; \sigma_n, \xi_n)$ sono simmetrici rispetto a $(\sigma_1, \xi_1), (\sigma_2, \xi_2), \cdots, (\sigma_n, \xi_n)$. Ogni coppia $\{\varphi, v\} \in \Phi \times \mathrm{V}$ sarà chiamata un *controllo ammissibile*.

II. PROBLEMA OTTIMALE. Supponiamo che la performanza del sistema S sottoposto al controllo $\{\varphi, v\} \in \Phi \times \mathrm{V}$ sia valutata tramite un funzionale avente la forma

$$\text{(II.1)} \qquad \mathrm{F}(\varphi, u, v, u_x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \mathrm{Q}(\varphi(t, x), u(t, x), v(t, x), u_x(t, x), t, x)\, dt\, dx,$$

ove $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\varphi, u, v, u_x, t, x)$ è una data funzione non negativa, continua rispetto a t ed x, continuamente differenziabile rispetto a φ, u, v e u_x per $(t, x) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, $\{\varphi, v\} \in \Phi \times \mathrm{V}$, essendovi la $u = u(t, x; \varphi, v)$ data mediante l'equazione (I.1).

Il nostro problema di ottimizzazione consta nella ricerca di un controllo ammissibile $\{\varphi^0, v^0\} \in \Phi \times \mathrm{V}$ per il quale il funzionale $\mathrm{F}(\varphi, u, v, u_x)$ assuma il suo minimo nelle ipotesi che tutte le assunzioni citate più sopra siano soddisfatte. Quindi,

$$\text{(II.2)} \qquad \mathrm{F}(\varphi^0, u^0, v^0, u_x^0) = \min_{\{\varphi, v\} \in \Phi \times \mathrm{V}} \mathrm{F}(\varphi, u, v, u_x),$$

ove si è posto $u \equiv u(t, x; \varphi, v)$ e $u^0 \equiv u(t, x; \varphi^0, v^0)$. Ogni coppia $\{\varphi^0, v^0\} \in \Phi \times \mathrm{V}$ per la quale è valida l'equazione (II.2) sarà chiamata un *controllo ottimale*.

L'esistenza di un controllo ottimale può essere dimostrata sotto condizioni molto generali concernenti gli spazi funzionali Φ e V.

In questa Nota ci occuperemo soltanto, facendo uso della programmazione dinamica, delle condizioni necessarie per l'ottimalità spettante ad un controllo ammissibile.

III. CONDIZIONI NECESSARIE DI OTTIMALITÀ. Utilizzando il principio di ottimalità [1] ed il metodo esposto nelle nostre Note [2] e [3], pubblicate recentissimamente in questi *Rendiconti*, si può dimostrare senza difficoltà che per un controllo ottimale il funzionale $\{\varphi^0, v^0\}$

$$\text{(III.1)} \qquad G(\varphi, v; \tau) = -\int_a^b Q(\varphi(\tau, x), u(\tau, x), v(\tau, x), u_x(\tau, x), \tau, x)\, dx$$

assume il suo minimo per ogni $\tau \in I$. E pertanto, per un controllo ottimale si ha

$$\text{(III.2)} \qquad \delta_\varphi G(\varphi, v; \tau) = 0 \quad , \quad \delta_v G(\varphi, v; \tau) = 0, \qquad \tau \in I,$$

ove $\delta_\varphi G$ e $\delta_v G$ denotano le prime variazioni del funzionale G rispetto a φ e v, in corrispondenza agli incrementi $\delta\varphi = \delta\varphi(t, x)$ e $\delta_v = \delta_v(t, x)$ tali che si abbia rispettivamente $\varphi + \delta\varphi \in \Phi$ e $v + \delta_v \in V$.

Sottolineiamo che si ha, ove si tenga conto dell'equazione (I.1),

$$\text{(III.3)} \qquad \delta_\varphi u(t, x; \varphi, v) = \delta\varphi(t, x) + \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K(t, x; \sigma, \xi)\, \delta\varphi(\sigma, \xi)$$

e

$$\text{(III.4)} \qquad \delta_v u(t, x; \varphi, v) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b H(t, x; \sigma, \xi)\, \delta v(\sigma, \xi),$$

ove i nuclei $K(t, x; \sigma, \xi)$ ed $H(t, x; \sigma, \xi)$ sono dati rispettivamente tramite i seguenti sviluppi (vedasi le equazioni (I.2) e (1.3))

$$\text{(III.5)} \qquad K(t, x; \sigma, \xi) = K_1(t, x; \sigma, \xi)$$

$$+ \frac{\lambda}{1!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_2(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma, \xi)\, \varphi(\sigma_1, \xi_1)\, d\sigma_1\, d\xi_1$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_3(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma_2, \xi_2; \sigma, \xi)\, \varphi(\sigma_1, \xi_1)\, \varphi(\sigma_2, \xi_2)\, d\sigma_1\, d\xi_1\, d\sigma_2\, d\xi_2$$

$$+ \cdots$$

e

$$\text{(III.6)} \qquad \mathrm{H}(t, x; \sigma, \xi) = \mathrm{H}(t, x; \sigma, \xi)$$

$$+ \frac{\mu}{1!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \mathrm{H}_2(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma, \xi)\, v(\sigma_1, \xi_1)\, d\sigma_1\, d\xi_1$$

$$+ \frac{\mu^2}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \mathrm{H}_3(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma_2, \xi_2; \sigma, \xi)\, v(\sigma_1, \xi_1)\, v(\sigma_2, \xi_2)\, d\sigma_1\, d\xi_1\, d\sigma_2\, d\xi_2$$

$$+ \cdots .$$

È ovvio che i nuclei K ed H sono continuamente differenziabili rispetto a (t, x). E pertanto la derivazione sotto il segno integrale è permessa nelle equazioni (III.3) e (III.4) rispetto a t ed x.

Tenendo conto delle equazioni (III.1) e (III.2), si ottiene

$$\text{(III.7)} \qquad \int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \varphi}\, \delta\varphi + \frac{\partial Q}{\partial u}\, \delta_\varphi u + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\, \delta_\varphi u_x \right\} dx = 0$$

e

$$\text{(III.8)} \qquad \int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial v}\, \delta v + \frac{\partial Q}{\partial u}\, \delta_v u + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\, \delta_v u \right\} dx = 0 ,$$

ove si ha $Q \equiv Q(\varphi(\tau, x), u(\tau, x), v(\tau, x), u_x(\tau, x), \tau, x)$.

Le equazioni (III.7) e (III.8) possono essere soddisfatte per le variazioni arbitrarie continuamente differenziabili $\delta\varphi$ e δu allora ed allora soltanto se, per $\tau \in \mathrm{I}$, $(\sigma, \xi) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, si ha

$$\text{(III.9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial v} = 0 , \\ & \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial u_x}\right) = 0, \\ & \int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u}\, \mathrm{K}(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}(\tau, x; \sigma, \xi) \right\} dx = 0, \\ & \int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial v}\, \mathrm{H}(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\, \mathrm{H}_x(\tau, x; \sigma, \xi) \right\} dx = 0. \end{aligned} \right.$$

e pertanto,

Controlli ottimali si trovano tra i controlli ammissibili $\{\varphi, v\}$ *soddisfacenti simultaneamente le equazioni* (III.9).

IV. Osservazioni. 1. Le condizioni spettanti alle funzioni ed alle serie figuranti nella descrizione del sistema di controllo, § I, possono essere indebolite. Questo però non costituiva la nostra preoccupazione nella presente Nota.

2. Nella serie di Note successive esporremo i nostri risultati conseguiti nello studio dei problemi ottimali polivibranti, caratterizzati dalla presenza dell'operatore differenziale d'ordine superiore sotto la forma de *derivata totale* nel senso di Picone [4], spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti, oppure presenteremo qualche altra estensione riguardante, ad esempio, il numero e la natura dei controlli introdotti.

3. I risultati ottenuti possono essere applicati a qualunque modello matematico del mondo fisico ove si sono conseguite rappresentazioni adequate per le soluzioni ricercate. Mentoviamo in quest'ultimo ordine delle idee varie rappresentazioni per le soluzioni di diversissimi sistemi integro–differenziali studiati in questo decennio [5].

4. Di un notevole interesse è pure il conseguimento dei risultati collegati con la serie di profonde Memorie dovute all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone [6] concernenti criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni e la metodica spettante alla programmazione dinamica ed al principio di ottimalità di R. E. Bellman, da noi conseguiti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. E. BELLMAN, *Dynamic Programming*. Princeton University Press. Princeton, N. J., 1957.

[2] M. N. OĞUZTÖRELÎ, *Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat e nat. », s. 8ª, *44* (1968).

[3] M. N. OĞUZTÖRELÎ e D. MANGERON, *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti* – I. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *44* (1968).

[4] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, «Ann. Sci. Univ. Jassy», I–e Sect., XXVI, *1*, 183–232 (1940).

[5] Vedasi, ad esempio, la serie di volumi: a) *Issledovania po integro–differentzialnym uravnoniam Kirgizii* (*Ricerche concernenti lo studio delle equazioni integro–differenziali conseguiti in Kirgizia*). Ed. Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1962, 1965; b) *Trudy konferentzii professorsko–prepodavatel' skogo sostava Kirg. Gos. Univ. i Kirg. Politechn. Inst.* Frunze 1963–1966. c) *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi*, serie Mat., Mecc. Fis. 1961–1966.

[6] M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*, « Atti della Accademia Naz. dei Lincei ». Memorie. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, Vol. VII, fasc. 3, 33–58, Anno CCCLX (1963).