
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GHEORGHE PIC, IOAN PURDEA

**Quelques propriétés des treillis des relations
difonctionnelles**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 45 (1968), n.3-4, p.
117-121.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_3-4_117_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Quelques propriétés des treillis des relations difonctionnelles.* Nota (*) di GHEORGHE PIC e IOAN PURDEA, presentata dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — L'insieme delle relazioni difunzionali (nel senso di J. Riguet [4]) fra due insiemi A, B costituisce notoriamente una chiusura entro $A \times B$, ed induce quindi ivi una struttura reticolare. Questa viene studiata nel presente lavoro dove, fra l'altro, si assegna una condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto di due relazioni difunzionali risulti ancora una relazione difunzionale.

1. — Riguet [4] a défini la relation difonctionnelle de la manière suivante:

DÉFINITION. — *La relation $R \subseteq A \times B$ est difonctionnelle si $R \bar{R} R \subseteq R$.*

Riguet a aussi montré que la relation $R \subseteq A \times B$ est difonctionnelle si, et seulement si, l'on peut exprimer R de la manière suivante:

$$(1) \quad R = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \quad \text{où} \quad A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset, \quad B_{i_1} \cap B_{i_2} = \emptyset \quad \text{et} \quad i_1 \neq i_2.$$

Soit $\mathfrak{D}(A, B)$ l'ensemble des relations difonctionnelles entre les éléments des ensembles A et B . Dans [4] (voir aussi [5]), on montre que $\mathfrak{D}(A, B)$ constitue une fermeture dans $A \times B$. Soit $\mathfrak{B}(A \times B)$ l'ensemble des sousensembles de $A \times B$ et $F: \mathfrak{B}(A \times B) \rightarrow \mathfrak{B}(A \times B)$ l'opérateur de fermeture défini par $\mathfrak{D}(A, B)$. L'ensemble ordonné $(\mathfrak{D}(A, B), \subseteq)$ est un treillis complet. Si $R_i \in \mathfrak{D}(A, B)$, $i \in I$, alors

$$\sup \{R_i\}_{i \in I} = F\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right),$$

$$\inf \{R_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} R_i.$$

Dans ce qui suit, nous donnerons, en utilisant la caractérisation (1) du treillis $\mathfrak{D}(A, B)$, une construction pour

$$\sup \{R_i\}_{i \in I} \quad \text{et} \quad \inf \{R_i\}_{i \in I},$$

les R_i étant des relations difonctionnelles. On donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux relations difonctionnelles soit à son tour une relation difonctionnelle. Enfin, on montre que le treillis $(\mathfrak{D}(A, B), \subseteq)$ est algébrique et on en détermine les éléments compacts. Pour les notations et notions utilisées nous renvoyons à [1], [4].

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1968.

2. - Soit $R_i \in \mathfrak{D}(A, B)$, $i \in I$, $R_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} \times B_{i,j}$. Dans l'ensemble $\{A_{i,j} \times B_{i,j}\}$, $i \in I$, $j \in J = \bigcup_{i \in I} J_i$ on définit une relation d'équivalence en mettant $A_{i,j} \times B_{i,j} \sim A'_{i,j} \times B'_{i,j}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments:

$$A_{i,j} \times B_{i,j} = A_{i,j}^{(1)} \times B_{i,j}^{(1)}, A_{i,j}^{(1)} \times B_{i,j}^{(1)} = A_{i,j}^{(2)} \times B_{i,j}^{(2)}, \dots, A_{i,j}^{(n)} \times B_{i,j}^{(n)} = A'_{i,j} \times B'_{i,j}$$

telle que

$$A_{i,j}^{(k)} \cap A_{i,j}^{(k+1)} \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad B_{i,j}^{(k)} \cap B_{i,j}^{(k+1)} \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Soit $\overline{A_{i,j} \times B_{i,j}}$ la classe d'équivalence dont le représentant est $A_{i,j} \times B_{i,j}$. Soit $\{\mathfrak{S}_l\}_{l \in L}$ une indexation bijective de l'ensemble quotient $\{A_{i,j} \times B_{i,j}\} / \sim$, $P_l = \{\bigcup A_{i,j} \times B_{i,j} \mid A_{i,j} \times B_{i,j} \in \mathfrak{S}_l\}$ et $|P_l|$ la fermeture rectangulaire de la relation P_l .

THÉORÈME 1. - $\sup \{R_i\}_{i \in I} = \bigcup_{l \in L} |P_l|$.

Démonstration. - Nous montrerons d'abord que $\bigcup_{l \in L} |P_l| \in \mathfrak{D}(A, B)$. Supposons que $\text{pr}_1 |P_{l_1}| \cap \text{pr}_1 |P_{l_2}| \neq \emptyset$.

Donc il existe $x \in \text{pr}_1 |P_{l_1}| \cap \text{pr}_1 |P_{l_2}|$, et par conséquent $y_1, y_2 \in B$, tels que

$$(x, y_1) \in A_{i,j}^{(1)} \times B_{i,j}^{(1)}, \quad A_{i,j}^{(1)} \times B_{i,j}^{(1)} \in \mathfrak{S}_{l_1},$$

$$(x, y_2) \in A_{i,j}^{(2)} \times B_{i,j}^{(2)}, \quad A_{i,j}^{(2)} \times B_{i,j}^{(2)} \in \mathfrak{S}_{l_2}.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{S}_{l_1} = \mathfrak{S}_{l_2}$, c'est-à-dire $\text{pr}_1 |P_{l_1}| = \text{pr}_1 |P_{l_2}|$. De la même manière on montre que de $\text{pr}_2 |P_{l_1}| \cap \text{pr}_2 |P_{l_2}| \neq \emptyset$ il résulte $\text{pr}_2 |P_{l_1}| = \text{pr}_2 |P_{l_2}|$.

On voit aisément que $R_i \subseteq \bigcup_{l \in L} |P_l|$, $i \in I$.

Soit maintenant $R_i \subseteq S$, $i \in I$, $S \in \mathfrak{D}(A, B)$, $S = \bigcup_{k \in K} A_k \times B_k$. Nous montrerons que $S = \bigcup_{l \in L} |P_l|$. Soit $A_{i,j} \times B_{i,j}, A'_{i,j} \times B'_{i,j} \in \mathfrak{S}_l$ et $A_{i,j} \times B_{i,j} \subseteq A_k \times B_k$, $A'_{i,j} \times B'_{i,j} \subseteq A_{k'} \times B_{k'}$. Il en résulte que

$$A_{i,j} \times B_{i,j} = A_{i,j}^{(1)} \times B_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(n)} \times B_{i,j}^{(n)} = A'_{i,j} \times B'_{i,j}$$

et on a

$$A_{i,j}^{(k)} \cap A_{i,j}^{(k+1)} \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad B_{i,j}^{(k)} \cap B_{i,j}^{(k+1)} \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Cela signifie que $A_{i,j}^{(l)} \times B_{i,j}^{(l)} \subseteq A_k \times B_k$ et $A_{i,j}^{(l)} \times B_{i,j}^{(l)} \subseteq A_{k'} \times B_{k'}$, $l = 1, 2, \dots, n-1$, donc $A_k \times B_k = A_{k'} \times B_{k'}$. Par conséquent, pour chaque P_l , $l \in L$, il existe un $A_k \times B_k$ tel que $P_l \subseteq A_k \times B_k$. Cela signifie que $|P_l| \subseteq A_k \times B_k$ et $\bigcup_{l \in L} |P_l| \subseteq S$.

THÉORÈME 2. - $\inf \{R_i\}_{i \in I} = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j} \right) \times \left(\bigcap_{j \in J_i} B_{i,j} \right)$.

Démonstration. - Nous montrerons d'abord que

$$R = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j} \right) \times \left(\bigcap_{j \in J_i} B_{i,j} \right) \in \mathfrak{D}(A, B).$$

Supposons que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_{ig(i)}\right) \neq 0.$$

$$\text{Si } \bigcap_{i \in I} A_{if(i)} \neq \bigcap_{i \in I} A_{ig(i)}, \quad \text{alors } f \neq g.$$

Il existe donc un $i \in I$ tel que $f(i) \neq g(i)$ et $A_{if(i)} \cap A_{ig(i)} = 0$. Cela donne une contradiction avec l'hypothèse faite. De la même manière on montre que $\left(\bigcap_{i \in I} B_{if(i)}\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_{ig(i)}\right) \neq 0$ donne $\bigcap_{i \in I} B_{if(i)} = \bigcap_{i \in I} B_{ig(i)}$.

On voit aisément que $R_i \subseteq R$, $i \in I$.

Soit maintenant $S \subseteq R_i$, $i \in I$ et $S = \bigcup_{l \in L} A_l \times B_l$. Cela signifie que pour chaque $A_l \times B_l$ et chaque $i \in I$ il existe un $j = f(i)$ tel que $A_l \times B_l \subseteq A_{if(i)} \times B_{if(i)}$. Donc $A_l \times B_l \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}\right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_{if(i)}\right)$. Donc $S \subseteq R$.

THÉORÈME 3. - Soit $R_1 \in \mathfrak{D}(A, B)$, $R_2 \in \mathfrak{D}(B, C)$, $R_1 = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$, $R_2 = \bigcup_{j \in J} B_j \times C_j$, $I' = \{i \in I \mid \exists j \in J, B_i \cap B_j \neq 0\}$, $J' = \{j \in J \mid \exists i \in I, B_i \cap B_j \neq 0\}$. $R_2 R_1$ est une relation difonctionnelle si et seulement si l'on peut trouver des décompositions $I' = \bigcup_{k \in K} I_k$ et $J' = \bigcup_{k \in K} J_k$ telles que $I_{k_1} \cap I_{k_2} = 0$ et $J_{k_1} \cap J_{k_2} = 0$ si $k_1 \neq k_2$ et $B_{i_k} \cap B_{j_k} \neq 0$ où $i_k \in I_k$, $j_k \in J_k$.

Démonstration. - Si les conditions du théorème sont satisfaites, alors:

$$\begin{aligned} R_2 R_1 &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i\right) \cdot \left(\bigcup_{j \in J} B_j \times C_j\right) = \\ &= \left[\left(\bigcup_{i \in I'} A_i \times B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I - I'} A_i \times B_i\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(\bigcup_{j \in J'} B_j \times C_j\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J - J'} B_j \times C_j\right)\right] = \\ &= \left(\bigcup_{i \in I'} A_i \times B_i\right) \cdot \left(\bigcup_{j \in J'} B_j \times C_j\right) = \\ &= \left[\bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i_k \in I_k} A_{i_k} \times B_{i_k}\right)\right] \cdot \left[\bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{j_k \in J_k} B_{j_k} \times C_{j_k}\right)\right] = \\ &= \bigcup_{k \in K} \left[\bigcup_{i_k \in I_k} (A_{i_k} \times B_{i_k}) \cdot \bigcup_{j_k \in J_k} (B_{j_k} \times C_{j_k})\right] = \\ &= \bigcup_{k \in K} \left[\bigcup_{(i_k, j_k) \in I_k \times J_k} (A_{i_k} \times B_{i_k}) \cdot (B_{j_k} \times C_{j_k})\right] = \\ &= \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{(i_k, j_k) \in I_k \times J_k} A_{i_k} \times C_{j_k}\right) = \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i_k \in I_k} A_{i_k}\right) \times \left(\bigcup_{j_k \in J_k} C_{j_k}\right). \end{aligned}$$

Mais $\left(\bigcup_{i_k \in I_k} A_{i_k}\right) \cap \left(\bigcup_{i_l \in I_l} A_{i_l}\right) = 0$, $\left(\bigcup_{j_k \in J_k} C_{j_k}\right) \cap \left(\bigcup_{j_l \in J_l} C_{j_l}\right) = 0$ si $k \neq l$, donc $R_2 R_1 \in \mathfrak{D}(A, C)$.

Un exemple nous montrera que, si les conditions du théorème ne sont pas vérifiées par R_1 et R_2 , alors il est possible que $R_2 R_1$ ne soit pas une relation difonctionnelle.

Soit $R_1 = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$, $R_2 = (B'_1 \times C_1) \cup (B'_2 \times C_2)$; $B_1 \cap B'_1 \neq \emptyset$, $B_1 \cap B'_2 \neq \emptyset$, $B_2 \cap B'_1 = \emptyset$, $B_2 \cap B'_2 \neq \emptyset$. Alors $R = R_2 R_1 = [A_1 \times (C_1 \cup C_2)] \cup [A_2 \times C_2]$. $R R R = [A_1 \times (C_1 \cup C_2)] \cup [A_2 \times (C_1 \cup C_2)] \cup (A_2 \times C_2) \neq R$. Donc $R \notin \mathfrak{D}(A, C)$.

Remarque. - Si $R_1, R_2 \in \mathfrak{E}(A, A) \subseteq \mathfrak{D}(A, A)$, $R_1 = \bigcup_{i \in I} A_i \times A_i$, $R_2 = \bigcup_{j \in J} B_j \times B_j$ [$\mathfrak{E}(A, A)$ est l'ensemble des relations d'équivalence partielle dans A], alors $R_2 R_1 \in \mathfrak{E}(A, A)$ si, et seulement si, en plus des conditions du théorème 3 sont vérifiées les conditions suivantes:

$$\bigcup_{i_k \in I_k} A_{i_k} = \bigcup_{j_k \in J_k} B_{j_k}.$$

3. THÉORÈME 4. - *Le treillis $(\mathfrak{D}(A, B), \subseteq)$ est algébrique.*

Démonstration. - Soit $\{R_i\}_{i \in I}$ un ensemble dirigé de relations difonctionnelles. Nous montrerons que $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ est une relation difonctionnelle. En effet

$$\begin{aligned} R R R &= \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) = \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) = \bigcup_{i_1, i_2, i_3 \in I} R_{i_1} R_{i_2} R_{i_3}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\{R_i\}_{i \in I}$ étant dirigé, il s'ensuit que pour chaque $i_1, i_2, i_3 \in I$ il existe un $i \in I$ tel que $R_{i_1}, R_{i_2}, R_{i_3} \subseteq R_i$. Donc $R_{i_1} R_{i_2} R_{i_3} \subseteq R_i R_i R_i = R_i$ parce que $R_i \in \mathfrak{D}(A, B)$ et $R R R \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i R_i R_i = \bigcup_{i \in I} R_i = R$. Cela signifie que $R \in \mathfrak{D}(A, B)$.

THÉORÈME 5. - *La relation $R \in \mathfrak{D}(A, B)$ est compacte dans $(\mathfrak{D}(A, B), \subseteq)$ si, et seulement si, $R = \bigcup_{k=1}^n A_k \times B_k$ où n est un entier positif et $A_k \times B_k$ a seulement un nombre fini d'éléments.*

Démonstration. - Soit $A_k \times B_k \subseteq \sup \{R_i\}_{i \in I}$, où $R_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j} \times B_{i,j}$ et $A_k \times B_k = \{x_1, \dots, x_m\} \times \{y_1, \dots, y_h\}$. Le théorème 1 nous montre que $A_k \times B_k \subseteq |P_l|$. $(x_l, y_r) \in |P_l|$ signifie qu'il existe un $A_{i,j}^l \times B_{i,j}^r \in P_l$ tel que $x_l \in A_{i,j}^l$ ou $y_r \in B_{i,j}^r$, $l = 1, \dots, m$; $r = 1, \dots, h$. Soit $R_{i,j}^{l,r}$ la relation qui a comme composante $A_{i,j}^l \times B_{i,j}^r$. Donc $A_k \times B_k \subseteq \sup \{R_{i,j}^{l,r}\}_{r=1, \dots, h}^{l=1, \dots, m}$ et cela signifie que $A_k \times B_k$ est compact et $R = \bigcup_{k=1}^n A_k \times B_k$ est à son tour une difonctionnelle compacte.

Réciproquement, si $R = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$ est une difonctionnelle compacte, alors $R = \sup \{(x, y)\}_{(x, y) \in R}$. R étant compacte, il en résulte $R = \sup \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}_{(x_k, y_k) \in R, k=1, 2, \dots, n}$. Donc R est égal à la réunion de ceux des $A_i \times B_i$ qui contiennent au moins un (x_k, y_k) , $k=1, \dots, n$.

Remarque. – Soit $\mathfrak{D}_1(A, B) \subseteq \mathfrak{D}(A, B)$ le treillis des relations difonctionnelles $\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$. Un résultat connu (voir par exemple [1] ou [3]) donne que le treillis des idéaux d'un semitreillis avec élément zéro $(\mathfrak{D}_1(A, B), \cup)$ est isomorphe à $(\mathfrak{D}(A, B), \subseteq)$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. GRAETZER, *Universal Algebra*. Van Nostrand, 1968 (à paraître).
- [2] G. GRAETZER et E. T. SCHMIDT, *Characterisations of congruence lattices of abstract algebras*, « Acta Sci. Math. » (Szeged), 24, 34–59 (1963).
- [3] L. NACHBIN, *On a characterisation of the lattices of all ideals of a Boolean ring*, « Fund. Math. », 36, 137–142 (1949).
- [4] J. RIGUET, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, « Bull. Soc. math. France », 76, 114–166 (1948).
- [5] V. V. WAGNER, *Théorie des relations et l'algèbre des applications partielles* (en russe dans le recueil: Teoria polygrupp i ee prilojenia), Université de Saratov, 3–178 (1965).