Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jenö Szép, Guido Zappa

Sui gruppi trifattorizzabili. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.3-4, p. 113–116.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_3-4_113_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1968 (Settembre–Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sui gruppi trifattorizzabili.* Nota I [(*)] di JENÖ SZÉP e GUIDO ZAPPA, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

RÉSUMÉ. — On donne les résultats principaux obtenus par les auteurs dans une recherche sur les groupes factorisables, c'est à dire sur les groupes qui peuvent être représentés comme produit de trois sous-groupes propres et conjugués.

È noto che un gruppo G non può essere rappresentato sotto la forma AB, con A e B sottogruppi propri, tra loro coniugati. Il numero minimo di fattori che possono comparire in un'espressione di G come prodotto di sottogruppi propri coniugati è quindi 3. Si presenta pertanto il problema di determinare i gruppi G per cui esistano tre sottogruppi propri tra loro coniugati, H_1, H_2, H_3 tali che $G = H_1 H_2 H_3$. Tali gruppi verranno detti trifattorizzabili.

Nella presente Nota, gli autori espongono i principali risultati sin qui raggiunti in una loro ricerca sui gruppi trifattorizzabili. Le dimostrazioni, assieme ad altri eventuali risultati, compariranno in un successivo lavoro.

1. – Un gruppo G si dice *trifattorizzabile* se esistono un sottogruppo proprio H di G e due elementi a, b di G tali che

$$G = aHa^{-1}HbHb^{-1} \tag{1}$$

(cioè se G è prodotto di tre sottogruppi propri tra loro coniugati). Si dice allora che i tre sottogruppi aHa^{-1}, H, bHb^{-1} (presi nell'ordine) costituiscono una *trifattorizzazione* di G.

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1968.

1.1 *Il gruppo* G *è trifattorizzabile se e solo se esistono un sottogruppo proprio* H *di* G *e un elemento* a *di* G *tali che*

$$G = Ha^{-1}HaH. \tag{2}$$

Infatti, se vale la (2) i sottogruppi H , $a^{-1}Ha$, H costituiscono una trifattorizzazione di G. Viceversa, se G è trifattorizzabile, vale la (1) con H sottogruppo proprio di G e a , b elementi di G. Si ha allora

$$G = a^{-1}Gb = a^{-1}aHa^{-1}Hb\,Hb^{-1}b = Ha^{-1}HbH\,.$$

Esisteranno quindi tre elementi h_1 , h_2 , h_3 di H tali che

$$1 = h_1\,a^{-1}\,h_2\,bh_3$$

cioè

$$b = h_2^{-1}ah_1^{-1}h_3^{-1}$$

Si ha allora

$$G = Ha^{-1}HbH = Ha^{-1}Hh_2^{-1}ah_1^{-1}h_3^{-1}H = Ha^{-1}HaH.$$

2. – *Criteri di esistenza di complementi normali di* H.

2.1. – *Se* G *è un gruppo finito, ed è* $G = Ha^{-1}HaH$ *con* H *sottogruppo di Hall di* G *e* a *elemento di* G, *si ha che il normalizzante* N(H) *di* H *in* G *coincide con* H.

Sia infatti Π l'insieme dei numeri primi che dividono l'ordine di H. Sia x un elemento di N(H). Si avrà

$$x = h_1\,a^{-1}\,h_2\,ah_3$$

con h_1 , h_2 , h_3 in H. Allora anche $h_1^{-1}xh_3^{-1} = a^{-1}h_2\,a$ è in N(H), perché h_1 , x e h_3 vi sono. Ma $a^{-1}h_2\,a$ è un Π–elemento, onde, essendo $a^{-1}h_2a$ permutabile con H, risulta che il sottogruppo $\{H\,,\,a^{-1}\,h_2\,a\}$ generato da H e $a^{-1}h_2a$ è un Π–sottogruppo di G. Essendo H un Π–sottogruppo di Hall di G, si ha che $\{H\,,\,a^{-1}h_2a\} = H$, cioè $a^{-1}h_2\,a$ è in H. Essendo h_1 e h_2 in H, si ha che anche $x = h_1\,a^{-1}\,h_2\,ah_3$ è in H, onde N(H) = H.

In base al noto teorema di Burnside sull'esistenza di un complemento normale di un sottogruppo di Sylow appartenente al centro del proprio normalizzante, e ad un teorema di Wielandt [2] che generalizza il teorema di Sylow, si può dimostrare il teorema:

2.2. – *Sia* G *un gruppo finito e sia* H *un suo sottogruppo di Hall appartenente al centro del proprio normalizzante. Allora esiste un sottogruppo* N *normale in* G *tale che* $G = HN$, $H \cap N = 1$.

Da 2.1 e 2.2 discende:

2.3. – *Sia* G *un gruppo finito, e sia* $G = Ha^{-1}HaH$ *con* H *sottogruppo di Hall abeliano di* G, *e* a *elemento di* G. *Allora esiste un sottogruppo normale* N *di* G *tale che* $G = HN$, $H \cap N = 1$.

Nel teorema precedente, non si può sostituire l'ipotesi che H sia abeliano con quella che H sia nilpotente. Infatti il gruppo totale S_4 di permutazioni su 4 oggetti ha un sottogruppo H d'ordine 8 (naturalmente, nilpotente), e si ha $S_4 = Ha^{-1}HaH$ con a conveniente elemento di S_4. Eppure S_4 non contiene sottogruppi normali di indice 8.

Neppure se si suppone che l'ordine di G sia dispari, si può sostituire l'ipotesi che H sia abeliano con quella che esso sia nilpotente. Sia infatti G il gruppo d'ordine $3^7 \cdot 7$, generato dagli elementi $a_1, a_2, \cdots, a_7, b, c$ legati dalle relazioni

$$a_i^3 = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, 7), \quad b^7 = 1 \;,\; c^3 = 1 \;,\; a_1 a_2 \cdots a_7 = 1 \;,\; a_i a_j = a_j a_i$$

$$(i, j = 1, \cdots, 7), \quad b^{-1} a_i b = a_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, 6), \quad b^{-1} a_7 b = a_1 \;,\; c^{-1} a_1 c = a_2,$$

$$c^{-1} a_2 c = a_4 \;,\; c^{-1} a_3 c = a_6 \;,\; c^{-1} a_4 c = a_1 \;,\; c^{-1} a_5 c = a_3 \;,\; c^{-1} a_6 c = a_5,$$

$$c^{-1} a_7 c = a_7 \;,\; c^{-1} bc = b^2 .$$

Gli elementi $a_1, \cdots, a_7, c$ generano un sottogruppo H d'ordine 3^7 (naturalmente, di Hall e nilpotente) e si ha $G = Hb^{-1}HbH$. D'altra parte, G non contiene alcun sottogruppo normale d'ordine 7.

Nel caso in cui H abbia ordine dispari, si può però arrivare ad un teorema più forte di 2.3, ricorrendo ad un noto teorema di Thompson [1] sull'esistenza di complementi normali.

Se P è un p-gruppo finito, indicheremo con J(P) il sottogruppo unione di tutti i sottogruppi abeliani di P per i quali è massimo il numero dei generatori appartenenti ad una loro base. Si dimostra allora il teorema seguente:

2.4. – *Sia* G *un gruppo finito e sia* H *un suo sottogruppo di Hall nilpotente d'ordine dispari, il cui normalizzante coincida con* H. *Inoltre, detti* $p_1, \cdots, p_s$ *i divisori primi dell'ordine di* H, *e* P_i *il* p_i*–sottogruppo di Sylow di* H $(i = 1, \cdots, s)$, *sia* P_i' *contenuto nel centro di* P_i *e sia* $J(P_i) = P_i$. *Allora esiste un sottogruppo normale* N *di* G *tale che* $G = HN$, $H \cap N = 1$.

Tenuto conto di 2.1, si ha

2.5. – *Sia* G *un gruppo finito, e sia* $G = Ha^{-1}HaH$, *con* H *sottogruppo di Hall nilpotente d'ordine dispari di* G, *e* a *elemento di* G. *Inoltre, detti* $p_1, \cdots, p_s$ *i divisori primi dell'ordine di* H, *e* P_i *il* p_i*–sottogruppo di Sylow di* H, *sia* P_i' *contenuto nel centro di* P_i *e sia* $J(P_i) = P_i$. *Allora esiste un sottogruppo normale* N *di* G *tale che* $G = HN$, $H \cap N = 1$.

Il sopracitato esempio di gruppo d'ordine $3^7 \cdot 7$ non contraddice questo teorema, perché per esso $J(H) = \{a_1, \cdots, a_7\}$, quindi $J(H) \neq H$.

Si osservi che si può avere $G = Ha^{-1}HaH$ anche nell'ipotesi che G sia semplice e H sia un sottogruppo di Hall risolubile. Infatti, se G è il gruppo alterno A_5 di permutazioni su 5 oggetti, e H è il sottogruppo costituito dalle permutazioni in A_5 che lasciano fermo un dato oggetto, si ha che G ha ordine 60 ed è semplice, che H ha ordine 12 e quindi è di Hall e risolubile, e che $G = Ha^{-1}HaH$ con a conveniente elemento di G.

3. – *Trifattorizzazioni massimali di gruppi finiti risolubili*. Sia G un gruppo finito, H un suo sottogruppo proprio e a un elemento di G, tali che $G = Ha^{-1}HaH$. La trifattorizzazione $H, a^{-1}Ha, H$ si dirà *massimale* se non esiste alcun sottogruppo H_1 di G tale che $H < H_1 < G$ e $G = H_1 b^{-1} H_1 b H_1$ con b in G.

Se G è un gruppo e H è un suo sottogruppo, dicesi *nocciolo* di H in G l'intersezione di tutti i coniugati di H in G, ovvero l'unione dei sottogruppi normali di G contenuti in H.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *antinormale* se il suo nocciolo in G si riduce al sottogruppo unità. Se M è il nocciolo di H in G, H/M è antinormale in G/M.

Si ha facilmente:

3.1. *Sia* G *un gruppo finito, sia* H *un suo sottogruppo proprio sia* a *un elemento di* G, *e sia* M *il nocciolo di* H *in* G. *Allora si ha* $G = Ha^{-1}HaH$ *se e solo se* $G/M = (H/M)(aM)^{-1}(H/M)(aM)(H/M)$.

Poiché H/M è antinormale in G/M, nella ricerca delle trifattorizzazioni massimali dei gruppi finiti risolubili ci si può ricondurre al caso in cui il sottogruppo H sia antinormale in G. Si dimostra il seguente teorema:

3.2. – *Sia* G *un gruppo finito risolubile. Si ha allora* $G = Ha^{-1}HaH$ *con* H *sottogruppo antinormale in* G, a *elemento conveniente di* G, *e* $H, a^{-1}Ha, H$ *trifattorizzazione massimale, se e solo se*:

a) *È* $G = HN$ *con* N *sottogruppo normale minimo di* G (*quindi abeliano elementare*), $H \cap N = 1$, *e il centralizzante di* N *in* G *coincide con* N;

b) *Esiste un elemento* b *di* N *tale che, detto* L *l'insieme dei trasformati di* b *mediante gli elementi di* H, *ogni elemento di* N *possa esprimersi, almeno in un modo, nella forma* $l_1^{-1} l_2$ *con* l_1, l_2 *in* L.

In altri termini, gli elementi di L costituiscono una specie di «difference set» di N.

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. G. THOMPSON, *Normal p-complements for finite groups*, «Journ. of Algebra», *1*, 43–46 (1964).

[2] H. WIELANDT, *Zum Satz von Sylow*, «Math. Zeitschr.», *60*, 407–409 (1954).