
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIO MARTELLI

Sul criterio di unicità di de La Vallée Poussin

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 45 (1968), n.1-2, p. 7-12.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_7_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali. — *Sul criterio di unicità di de La Vallée Poussin*^(*). Nota^(**) di MARIO MARTELLI, presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — We give a criterion for the uniqueness of the solution (according to Carathéodory) of particular boundary value problems. This criterion is based on an inequality similar to the classic one by de La Vallée Poussin.

1. — Considero il problema ai limiti omogeneo per il sistema differenziale:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n a_{n-i}(t) x^{(n-i)}(t)$$

$$(2) \quad x(t_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

con $[a, b]$ intervallo finito assegnato, $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$.

Si suppone che $a_{n-i}(t) \in L^p[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $1 \leq p \leq \infty$, essendo $L^p[a, b]$ lo spazio delle funzioni $t \rightarrow \alpha(t)$ misurabili in $[a, b]$ con

$$\int_a^b |\alpha(t)|^p dt < \infty, \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty$$

(integrale di Lebesgue) e con

$$\text{ess. sup.}_{t \in [a, b]} |\alpha(t)| < \infty, \quad \text{se } p = \infty.$$

Chiamerò soluzione del problema una funzione $x(t)$, con derivata $n-1$ assolutamente continua, che verifichi la (1) quasi ovunque in $[a, b]$ e soddisfi la (2).

Ch. de la Vallée Poussin ha dimostrato [1], nel caso $a_{n-i}(t) \in C[a, b]$, che, se risulta $b-a < h_0$ dove h_0 è la radice positiva dell'equazione:

$$(3) \quad L_{n-1} \frac{h^n}{n!} + L_{n-2} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{L_0 h}{1!} - 1 = 0$$

$$L_{i-1} = \max_{t \in [a, b]} |a_{n-i}(t)|, \quad (i = 1, \dots, n),$$

la sola soluzione del problema (1), (2) è quella identicamente nulla.

La (3) è stata notevolmente migliorata, nel caso $n=2$ ed $n=3$, da Z. Opial [2] e A. Lasota [3] rispettivamente.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo n. 11 di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1968.

M. Hukuhara [4] ha dimostrato, nel caso $a_{n-i}(t) \in L^1[a, b]$, che se risulta $b - a < h_0$, dove h_0 è la radice positiva dell'equazione

$$(4) \quad \|a_0\|_1 h^n + \|a_1\|_1 h^{n-1} + \dots + \|a_{n-1}\|_1 h - 1 = 0$$

$$\|a_{n-i}\|_1 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b |a_{n-i}(t)| dt,$$

il problema (1), (2) ammette la sola soluzione identicamente nulla.

Nel presente lavoro intendo provare il seguente

TEOREMA. - « *Posto*

$$\|a_{n-i}\|_p = \frac{1}{(b-a)^{1/p}} \int_a^b |a_{n-i}(t)|^p dt \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|a_{n-i}\|_\infty = \text{ess. sup}_{t \in [a, b]} |a_{n-i}(t)| \quad \text{se } p = \infty,$$

sia h_0 la radice positiva dell'equazione

$$(5_p) \quad \frac{\|a_0\|_p}{(n-1)!} h^n + \frac{\|a_1\|_p}{(n-2)!} h^{n-1} + \dots + \frac{\|a_{n-2}\|_p}{1!} h^2 + \frac{\|a_{n-1}\|_p}{0!} h - 1 = 0.$$

Allora se $b - a < h_0$ il problema (1), (2) ha solo la soluzione identicamente nulla ».

Dimostrazione. - Procedendo per assurdo supponiamo che sia $b - a < h_0$ ed esista una soluzione del problema (1), (2): $x(t)$ non identicamente nulla. La $x(t)$ è quindi una funzione con derivata $n-1$ assolutamente continua e si annulla n volte almeno nell'intervallo $[a, b]$.

Consideriamo $n-1$ zeri della $x(t): t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Sia $\mu = \max_{t \in [a, b]} |x^{(n-1)}(t)|$ e t_{n+1} un qualunque punto di $[a, b]$.

La funzione

$$\Phi(t) = x(t) - \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{n-1})}{(n-1)!} \cdot A$$

dove $A = (n-1)! x(t_{n+1}) / (t_{n+1}-t_1)\dots(t_{n+1}-t_{n-1})$ si annulla in $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_{n+1}$.

Esiste quindi un punto ξ interno ad $[a, b]$ tale che $\Phi^{(n-1)}(\xi) = 0$, ovvero $x^{(n-1)}(\xi) - A = 0$, e perciò

$$x(t_{n+1}) = (t_{n+1}-t_1)(t_{n+1}-t_2)\dots(t_{n+1}-t_{n-1}) \cdot x^{(n-1)}(\xi) / (n-1)!.$$

Ma essendo t_{n+1} un generico punto di $[a, b]$ abbiamo

$$|x(t)| \leq \frac{\mu}{(n-1)!} |(t-t_1)\dots(t-t_{n-1})| < \frac{\mu}{(n-1)!} (b-a)^{n-1},$$

e in generale

$$(6) \quad |x^{(i)}(t)| < \mu \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

(Questo ragionamento è analogo a quello usato da de La Vallée Poussin per la dimostrazione del suo teorema [1]. Cfr. anche [5] p. 181).

D'altra parte $x^{(n-i)}(t) \in L^q[a, b]$ con $1/p + 1/q = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, e quindi:

$$(7) \quad a_{n-i}(t) x^{(n-i)}(t) \in L^1[a, b], \quad x^{(n)}(t) \in L^1[a, b].$$

Consideriamo l'eguaglianza

$$x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(\xi) + \int_{\xi}^t x^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Dal momento che la $x(t)$ deve annullarsi n volte almeno in $[a, b]$ esiste certamente $\eta \in [a, b]$ tale che $x^{(n-1)}(\eta) = 0$. Allora l'eguaglianza precedente può essere scritta nella forma

$$x^{(n-1)}(t) = \int_{\eta}^t x^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Quindi

$$|x^{(n-1)}(t)| \leq \int_{\eta}^t |x^{(n)}(\tau)| d\tau \leq \int_a^b |x^{(n)}(t)| dt$$

ed anche

$$(8) \quad \max_{t \in [a, b]} |x^{(n-1)}(t)| = \mu \leq \int_a^b |x^{(n)}(t)| dt.$$

Riprendiamo ora la (1). Per la soluzione $x(t)$ che stiamo esaminando potremo scrivere

$$|x^{(n)}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |a_{n-i}(t)| |x^{(n-i)}(t)| \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

Ricordando la (7) e la (8)

$$\mu \leq \int_a^b |x^{(n)}(t)| dt \leq \sum_{i=1}^n \int_a^b |a_{n-i}(t)| |x^{(n-i)}(t)| dt.$$

Supponiamo dapprima $1 < p < +\infty$ e successivamente considereremo i casi $p = 1$, $p = \infty$.

i) Applico ora, nel caso $1 < p < \infty$, la disuguaglianza di Hölder-Riesz ed ottengo

$$(9) \quad \mu \leq \sum_1^n \left(\int_a^b |a_{n-i}(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |x^{(n-i)}(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Tenendo presente la (6), la (9) diviene:

$$\begin{aligned} \mu &\leq \sum_1^n \mu \frac{(b-a)^{i-1}}{(i-1)!} (b-a)^{1/q} \left(\int_a^b |a_{n-i}(t)|^p dt \right)^{1/p} = \\ &= \mu \sum_1^n \frac{(b-a)^{i-1+1/q}}{(i-1)!} \left(\int_a^b |a_{n-i}(t)|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ricordando la posizione fatta all'inizio del teorema potrò concludere:

$$\mu \leq \mu \sum_1^n \frac{(b-a)^{i-1+1/q}}{(i-1)!} \cdot (b-a)^{1/p} \|a_{n-i}\|_p = \mu \sum_1^n \frac{(b-a)^i}{(i-1)!} \|a_{n-i}\|_p.$$

Dividendo per $\mu \neq 0$ otterrò infine

$$(10) \quad 1 \leq \sum_1^n \frac{(b-a)^i}{(i-1)!} \|a_{n-i}\|_p$$

che è in contraddizione con la (5_p) poiché per ipotesi $b-a < h_0$. Dunque non può esistere una soluzione del problema (1), (2) che, in tale ipotesi, risulti diversa da quella identicamente nulla.

ii) Qualora sia $p = 1$ vale la disuguaglianza seguente:

$$\int_a^b |a(t)| |b(t)| dt \leq \text{ess. sup.}_{t \in [a, b]} |b(t)| \int_a^b |a(t)| dt$$

se $a(t) \in L^1[a, b]$ e $b(t) \in L^\infty[a, b]$.

Allora, dato che nel nostro caso $b(t) = x^{(n-i)}(t) \in C^{i-1}[a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$, potremo porre senz'altro

$$\mu \leq \sum_1^n \int_a^b |a_{n-i}(t)| |x^{(n-i)}(t)| dt \leq \sum_1^n \mu \frac{(b-a)^{i-1}}{(i-1)!} \int_a^b |a_{n-i}(t)| dt.$$

E tenendo presenti, ancora una volta, le posizioni fatte all'inizio del teorema otterremo

$$1 \leq \sum_1^n \frac{(b-a)^i}{(i-1)!} \|a_{n-i}\|_1$$

ancora in contraddizione con la (5_p), che in tale caso si riduce alla

$$(51) \quad \frac{\|a_0\|_1}{(n-1)!} h^n + \frac{\|a_1\|_1}{(n-2)!} h^{n-1} + \dots + \frac{\|a_{n-2}\|_1}{1!} h^2 + \frac{\|a_{n-1}\|_1}{0!} h - 1 = 0.$$

iii) Se $p = \infty$ va osservato che si ha anche $a_{n-i}(t) \in L^1[a, b]$, quindi può essere applicato ancora il procedimento precedente che conduce alla disuguaglianza

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)^i}{(i-1)!} \|a_{n-i}\|_1$$

in contraddizione con la (51).

2. - Osserviamo che la (5_p) è tanto migliore quanto più grande è h_0 e quindi quanto più piccoli sono i coefficienti di $h^n, \dots, h$.

Perciò per $p = 1$ la (5_p), ovvero (51), è migliore della (4). Invece se $p = \infty$ la (5_p) è in generale peggiore della

$$(3') \quad \frac{\|a_0\|_\infty}{n!} h^n + \frac{\|a_1\|_\infty}{(n-1)!} h^{n-1} + \dots + \frac{\|a_{n-2}\|_\infty}{2!} h^2 + \frac{\|a_{n-1}\|_\infty}{1!} h - 1 = 0$$

che dà luogo alla (3) se i coefficienti sono continui.

Però va osservato, come abbiamo detto sopra, che se $a_{n-i}(t) \in L^\infty[a, b]$, $i = 1, \dots, n$ allora $a_{n-i}(t) \in L^1[a, b]$, e si può usare la (51) che può essere migliore della (3'), ossia della (3), come mostra il seguente

Esempio. - Sia dato il problema ai limiti:

$$\ddot{x} + \frac{e^{-t^2}}{b^2} x = 0$$

$$x(0) = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad \alpha > 0, \quad b \text{ parametro reale}$$

Ci si domanda se esistono soluzioni non nulle di tale problema.

Poiché $a_1(t) = 0$, $\max_{t \in [a, b]} |a_0(t)| = 1/b^2$, per la disuguaglianza di de La Vallée Poussin otterremo $h^2/(2!b^2) - 1 = 0$, $h_0 = b/\sqrt{2}$. Quindi la disuguaglianza (3) ci assicura che esiste la sola soluzione identicamente nulla se $\alpha < b/\sqrt{2}$.

Invece per la disuguaglianza (51) si ha

$$a_1(t) = 0 \quad \|a_0\|_1 = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{e^{-t^2}}{b^2} dt = \frac{1}{b^2 \alpha} \int_0^\alpha e^{-t^2} dt.$$

Ma

$$\int_0^\alpha e^{-t^2} dt < \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Perciò } \|a_0\|_1 < \frac{\sqrt{\pi}}{2 b^2 \alpha}.$$

Avremo quindi

$$\|a_0\|_1 h^2 - 1 = 0 \quad , \quad h_0^2 = \frac{1}{\|a_0\|_1} \quad , \quad h_0^2 > \frac{2\alpha b^2}{\sqrt{\pi}}$$

e pertanto

$$\alpha \leq \frac{2b^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Di conseguenza questa seconda valutazione sarà migliore di quella offerta dalla (3) se $b\sqrt{2} < \frac{2b^2}{\sqrt{\pi}}$, ossia $b > \sqrt{\pi}/2$, peggiore se $b < \sqrt{\pi}/2$.

La formula di Z. Opial [2] ci dice invece che esiste la sola soluzione identicamente nulla se $\alpha < b\pi$ ed è quindi peggiore della (5_b) se $b > \sqrt{\pi^3/4}$ (se $b > 3$), migliore se $b < \sqrt{\pi^3/4}$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'équation différentielle du second ordre*, « J. Math. Pures et Appl. », 8, 125-144 (1929).
- [2] Z. OPIAL, *Sur une inégalité de Ch. de La Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre*, « Ann. Pol. Math. », 6, 87-91 (1959).
- [3] A. LASOTA, *Sur les problèmes linéaires pour un système d'équations différentielles ordinaires*, « Bull. Ac. Pol. Sci. Sér. Sc. Math. Phys. et Astr. », 10, 565-570 (1962).
- [4] M. HUKUHARA, *Une propriété de l'application $f[x, y, y' \dots y^{(n-1)}]$* , « Funkcialaj Ekvacioj », 5, 135-144 (1963).
- [5] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima. II Ediz. Zanichelli, Bologna 1965.