Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alexe Marinescu

Sur la généralisation d'un problème variationnel de la manoeuvre de rendez-vous sur orbites, avec minimum de combustible

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.1-2, p. 32–38.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_32_0>

Astrodinamica. — *Sur la généralisation d'un problème variationnel de la manoeuvre de rendez-vous sur orbites, avec minimum de combustible.* Nota (*) di ALEXE MARINESCU (**), presentata dal Socio C. FERRARI.

RIASSUNTO. — Si presenta una generalizzazione del problema variazionale per la manovra ottima d'incontro con minimo combustibile di due missili (apparecchi) cosmici muovendosi su orbite circolari.

L'autore mostra che lo studio di una manovra ottima su qualche orbita conica si può effettuare particolarizzando i risultati del presente lavoro.

Notations:

OXZY	– système planétocentrique des axes de coordonnées (fig. 1);
Axzy	– système d'axes de coordonnées lié à l'engin poursuivi (cible) A, dépourvu d'installation de propulsion;
x, z, y	– coordonnées de l'engin poursuivant B, muni d'installation de propulsion, dans le système Axzy;
$r_0(t)$	– rayon vecteur de l'engin poursuivi;
a_x, a_z, a_y	– composantes de l'accélération dû à la poussée $\vec{a}$ d'après les axes du système Axzy;
V_x, V_z, V_y	– composantes de la vitesse relative de l'engin poursuivant d'après les axes du système Axzy;
μ	– paramètre gravitationnel;
p	– paramètre focal de l'orbite de l'engin poursuivi;
ε	– l'excentricité de l'orbite de l'engin poursuivi;
Φ	– véritable anomalie de l'engin poursuivi;
τ	– durée de combustion de l'installation de propulsion;
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$	– multiplicateurs Lagrangiens.

Dans les travaux [1], [2], on a étudié la manoeuvre optimale de rendez-vous de deux engins, avec minimum de combustible, sur des orbites circulaires, en tenant aussi compte des équations linéaires, ainsi que des équations non linéaires du mouvement de l'engin poursuivant.

On a montré que dans les deux cas, le problème variationnel de la manoeuvre n'était en somme qu'un problème d'extrémum conditionné.

Dans le présent travail, l'auteur se propose de montrer qu'en formulant, dans le cas général, le problème variationnel comme dans les travaux [1]

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1968.

(**) L'auteur saisit cette occasion pour exprimer sa chaleureuse gratitude à M.le Professeur Carlo Ferrari du Politecnico di Torino, pour tout le bienveillant appui accordé à la publication du présent travail.

et [2], on peut envisager l'étude de la manoeuvre optimale de rendez-vous sur n'importe quelle sorte d'orbite conique à l'aide d'une particularisation des résultats obtenus dans ce travail.

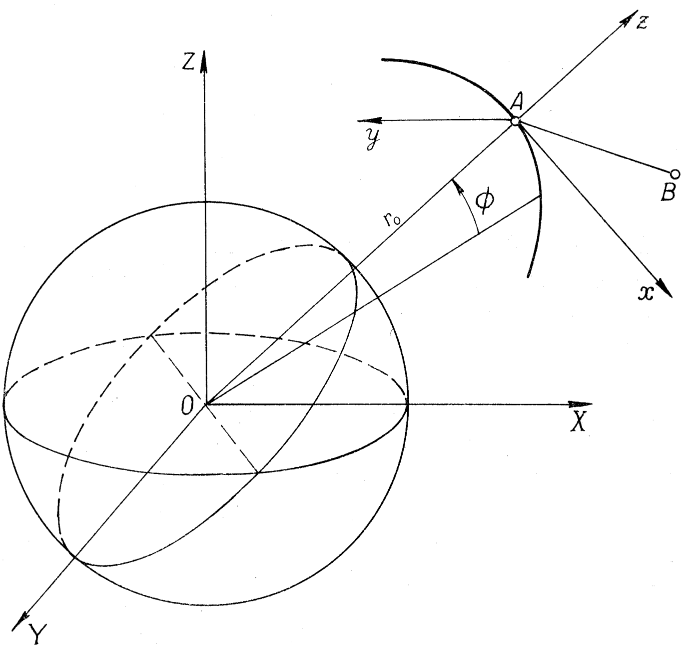

Fig. 1.

1. LE PROBLÈME NON LINÉAIRE.

Le problème variationnel de la manoeuvre optimale de rendez-vous à minimum de combustible, sur n'importe quelle sorte d'orbite conique, revient à trouver le minimum de l'intégrale

$$\text{(1)} \qquad J = \int_0^{\tau} (a_x^2 + a_z^2 + a_y^2)\, dt$$

avec les conditions

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{dx}{dt} - V_x = 0$$

$$\text{(2)} \qquad \tilde{\Phi}_2 = \frac{dV_x}{dt} - \frac{\mu p}{r_0^4} x - 2 V_z \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} z \sin \Phi + \mu \frac{x}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} - a_x = 0$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \frac{dz}{dt} - V_z = 0$$

$$\tilde{\Phi}_4 = \frac{dV_z}{dt} - \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\mu p}{r_0^4} z + 2 V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \frac{2 \mu \varepsilon}{r_0^3} x \sin \Phi$$

$$+ \mu \frac{r_0 + z}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} - a_z = 0$$

(2)

$$\tilde{\Phi}_5 = \frac{dy}{dt} - V_y = 0$$

$$\tilde{\Phi}_6 = \frac{dV_y}{dt} + \mu \frac{y}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} - a_y = 0 .$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$ et en réduisant le problème à un problème d'extrémum non conditionné (voir [1], [2]), nous sommes conduits, à la suite des calculs, au suivant système d'équations différentielles des extrémales:

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \Psi_1 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\mu p}{r_0^4} x + 2 V_z \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \frac{2 \mu \varepsilon}{r_0^3} z \sin \Phi - \mu \frac{x}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} + a_x$$

$$= \Psi_2 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z = \Psi_3 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\mu}{r_0^2} + \frac{\mu p}{r_0^4} z - 2 V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2 \mu \varepsilon}{r_0^3} x \sin \Phi - \mu \frac{r_0 + z}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} + a_z$$

$$= \Psi_4 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \Psi_5 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

(3)

$$\frac{dV_y}{dt} = - \mu \frac{y}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{3/2}} + a_y$$

$$= \Psi_6 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = - \lambda_2 \frac{\mu p}{r_0^4} + \lambda_2 \mu \frac{-2 x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{5/2}} - \lambda_4 \frac{2 \mu \varepsilon}{r_0^3} \sin \Phi$$

$$+ \lambda_4 \mu \frac{-3 x (r_0 + z)}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{5/2}} + \lambda_6 \mu \frac{-3 xy}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{5/2}}$$

$$= \Psi_7 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = - \lambda_1 + 2 \lambda_4 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2}$$

$$= \Psi_8 (t , x , z , y , V_x , V_z , V_y , \lambda_1 , \cdots, \lambda_6)$$

(3)

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \lambda_2 \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\Phi + \lambda_2 \mu \frac{-3x(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} - \lambda_4 \frac{\mu p}{r_0^4}$$

$$+ \lambda_4 \mu \frac{x^2 - 2(r_0+z)^2 + y^2}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} + \lambda_6 \mu \frac{-3y(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}$$

$$= \Psi_9 (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -2\lambda_2 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \lambda_3$$

$$= \Psi_{10} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \lambda_2 \mu \frac{-3xy}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} + \lambda_4 \mu \frac{-3(r_0+z)y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}$$

$$+ \lambda_6 \mu \frac{x^2+(r_0+z)^2-2y^2}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}$$

$$= \Psi_{11} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \cdots, \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = -\lambda_5 = \Psi_{12} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \cdots, \lambda_6)$$

et aux équations algébriques

$$2a_x - \lambda_2 = 0 \quad ; \quad 2a_z - \lambda_4 = 0 \quad ; \quad 2a_y - \lambda_6 = 0 .$$

Si dans le système ci-dessus, nous notons $\varepsilon = 0$ et $p = r_0 = R$, où R est le rayon de l'orbite circulaire, étant donné que $\omega = \sqrt{\mu/R^3}$ on obtient le système du travail [2].

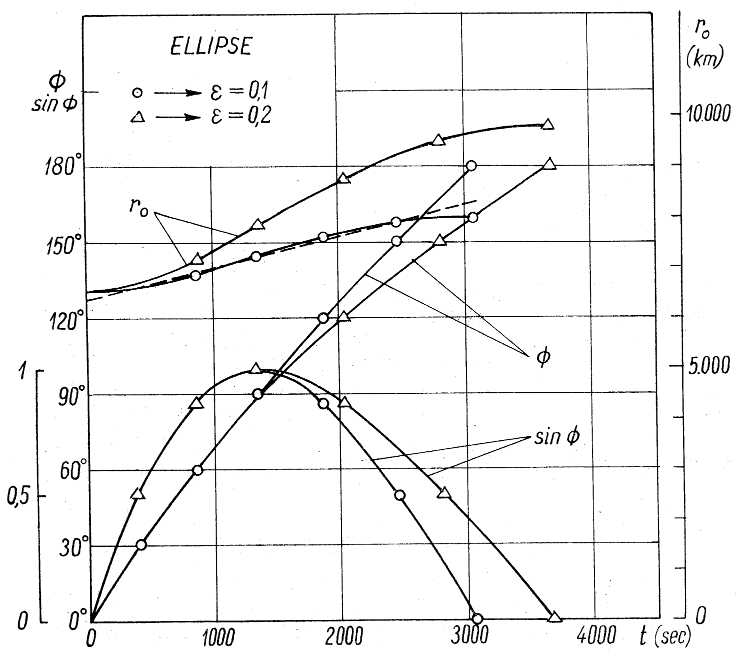

Fig. 2.

Le système (3) peut être résolu comme en [2], par approximation successives, vu que les fonctions Ψ_i ($i = 1, 2, \cdots, 12$) sont continues et remplissent les conditions de Lipschitz.

Les calculs ont montré que lorsque la cible se meut sur une ellipse ($0 < \varepsilon < 1$), sur les portions où il est indiqué que le rendez-vous aît lieu, $r_0(t)$ et $\sin \Phi(t)$ peuvent s'exprimer (voir fig. 2) sous la forme:

$$r_0(t) \approx at + b$$

$$\sin \Phi(t) \approx a_1 t + b_1 t^2 + c_1 t^3$$

en obtenant les solutions du système (3) (les extrémales) en première approximation, par intégrations élémentaires.

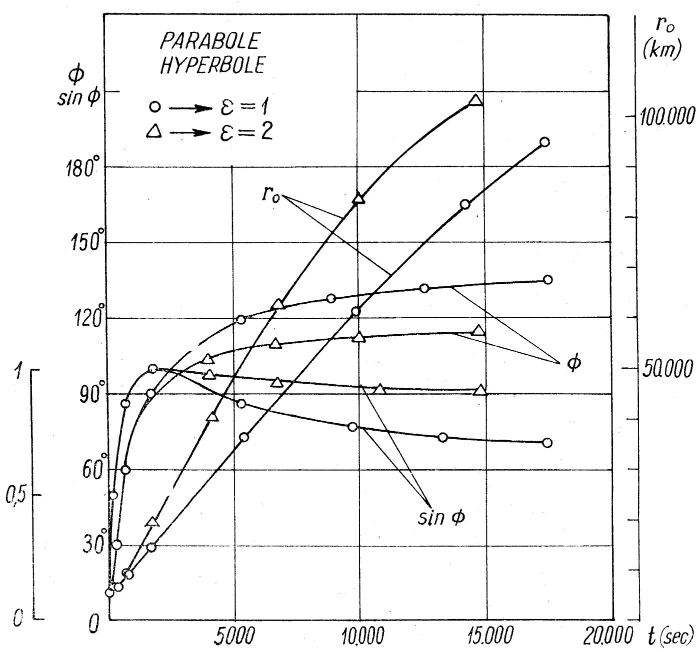

Fig. 3.

Pour la parabole ($\varepsilon = 1$), ainsi que pour l'hyperbole ($\varepsilon > 1$), qui présente de l'intérêt pour le rendez-vous orbital dans l'avenir, on peut prendre (voir fig. 3)

$$r_0(t) \approx mt + n$$

$$\sin \Phi(t) \approx m_1 t + n_1$$

les extrémales s'obtenant aussi facilement.

2. Le problème linéaire.

Si dans les conditions (2), on considère $r_0 \approx r_{0m} \approx Ct$ et $\sin \Phi \approx \sin \Phi_m \approx Ct$ (approximation acceptable pour de petites distances entre engins) et de plus on considère – au lieu des composantes non linéaires de l'accélération gravitationnelle – les composantes linéaires, en suivant la même voie que celle du paragraphe précédent on sera conduit, par suite des calculs, au système suivant d'équations différentielles des extrémales:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = V_x \\
&\frac{dV_x}{dt} = \alpha_1 x - \alpha_2 z + \alpha_3 V_z + a_x \\
&\frac{dz}{dt} = V_z \\
&\frac{dV_z}{dt} = \alpha_2 x + \beta_1 z - \alpha_3 V_x + a_z \\
&\frac{dy}{dt} = V_y \\
&\frac{dV_y}{dt} = -\gamma_1 y + a_y \\
&\frac{d\lambda_1}{dt} = -\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_4 \\
&\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + \alpha_3 \lambda_4 \\
&\frac{d\lambda_3}{dt} = \alpha_2 \lambda_2 - \beta_1 \lambda_4 \\
&\frac{d\lambda_4}{dt} = -\alpha_3 \lambda_2 - \lambda_3 \\
&\frac{d\lambda_5}{dt} = \gamma_1 \lambda_6 \\
&\frac{d\lambda_6}{dt} = -\lambda_5
\end{aligned}
\tag{4}
$$

où

$$
\alpha_1 = \frac{\mu p}{r_{0m}^4} - \frac{\mu}{r_{0m}^3} \quad ; \quad \alpha_3 = 2\,\frac{\sqrt{\mu p}}{r_{0m}^3} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{\mu}{r_{0m}^3}
$$

$$
\alpha_2 = \frac{2\,\mu\varepsilon}{r_{0m}^3} \sin \Phi_m \quad ; \quad \beta_1 = \frac{\mu p}{r_{0m}^4} + \frac{2\,\mu}{r_{0m}^3}
$$

et aux équations algébriques

$$
2\,a_x - \lambda_2 = 0 \quad ; \quad 2\,a_z - \lambda_4 = 0 \quad ; \quad 2\,a_y - \lambda_6 = 0.
$$

On remarque aisément dans ce cas aussi que si l'on met $\varepsilon = 0$ et $p = r_{0m} = R$, étant donné que $\omega = \sqrt{\mu/R^3}$, on obtient le système d'extrémales de [1]. Le système (4) s'intègre sans difficulté, pour n'importe quelle orbite, par les méthodes courantes.

On peut donc affirmer que l'étude de la manoeuvre optimale du rendez-vous de deux engins, avec minimum de combustible, sur n'importe quelle sorte d'orbite conique, peut aisément étre entreprise en suivant la voie indiquée dans le présent travail.

References.

[1] AL. MARINESCU, *Contributions à l'étude de certaines manoeuvres optimales pour le rendez-vous des engins sur des orbites circulaires*. Proceedings of the XVI-th International Astronautical Congress, Athens 1965.

[2] AL. MARINESCU, *Sur la manoeuvre optimale pour le rendez-vous des engins sur des orbites circulaires à minimum de combustible, compte tenu des équations non linéaires du mouvement de l'engin poursuivant*. Proceedings of the XVIII-th International Astronautical Congress, Belgrade 1967.