Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vittorio Cantoni

Sulle distribuzioni superficiali di materia in relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.1-2, p. 22–31.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_22_0>

Fisica matematica. — *Sulle distribuzioni superficiali di materia in relatività generale.* Nota [(*)] di VITTORIO CANTONI, presentata dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — The matching conditions across a hypersurface representing the evolution of a layer of matter are derived from Einstein's equations and from Lichnerowicz' matching conditions by a limiting process which consists in letting the thickness of a volume distribution of dust tend to zero, and are shown to give, in the newtonian approximation, the classical matching conditions for the derivatives of the newtonian potential across a layer of matter. The point of view adopted here is distinct from the ones adopted by Lanczos and Papapetrou & Treder in dealing with the same problem.

1. INTRODUZIONE.

In relatività generale le sorgenti del campo gravitazionale si considerano generalmente distribuite su regioni quadridimensionali della varietà spazio-tempo, ove vengono descritte mediante un tensore energia-impulso dotato, in coordinate ammissibili, di componenti *ovunque limitate*, e di classe C^1 salvo, al più, su un numero finito di ipersuperfici di discontinuità. Corrispondentemente si richiede, con Lichnerowicz, che i potenziali gravitazionali siano *ovunque di classe* C^1, e dotati di derivate seconde e terze continue salvo, al più, su un numero finito di ipersuperfici di discontinuità (Lichnerowicz [7], pp. 1-6).

Se le sorgenti del campo sono concentrate in strati sottili, si è spontaneamente condotti a cercare di caratterizzarne la distribuzione mediante enti geometrici definiti su ipersuperfici, ma non ci si può aspettare che una tale schematizzazione sia ancora compatibile con le condizioni di Lichnerowicz, ed è necessario adattare la teoria indebolendo le ipotesi di regolarità e precisando le nuove condizioni di raccordo attraverso le ipersuperfici di discontinuità.

Come è stato messo in evidenza con grande chiarezza da O' Brien & Synge [8], per effettuare un siffatto adattamento di una teoria di campo i procedimenti disponibili sono sostanzialmente tre. Il primo consiste nel postulare fin dall'inizio, accanto alle equazioni di campo, le condizioni di regolarità e di raccordo attraverso le ipersuperfici di discontinuità, (riservandosi, s'intende, di verificare a posteriori la coerenza della teoria così ottenuta). Un tale procedimento è applicabile quando le condizioni di raccordo vengono suggerite da considerazioni intuitive, il che accade di rado in relatività generale. Il secondo procedimento consiste nel *dedurre* le condizioni di rac-

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1968.

cordo a partire dalle equazioni del campo, sostituendo in un primo tempo le ipersuperfici di discontinuità con strati di spessore finito in cui le quantità destinate a diventare discontinue variano rapidamente ma ancora con continuità, e facendo poi tendere a zero lo spessore dello strato, con opportune ipotesi qualitative sul comportamento delle diverse grandezze nel passaggio al limite: questo procedimento è stato applicato da O' Brien & Synge in relatività generale per studiare discontinuità del genere di quelle che generalmente si presentano nel passaggio da una regione vuota ad una regione occupata da materia. Il terzo procedimento consiste nel sostituire le equazioni differenziali del campo con equazioni integrali ad esse equivalenti nelle regioni in cui non sono presenti ipersuperfici di discontinuità, e nel trasformare queste nuove equazioni in modo tale che abbiano senso anche laddove tali ipersuperfici sono presenti, per poi dedurne le condizioni di raccordo da affiancare alle equazioni differenziali del campo.

Quest'ultimo procedimento è quello seguito da Lanczos [5] [6] nello studio delle distribuzioni superficiali di materia: le equazioni di Einstein

$$G_{ik} = -\chi T_{ik} \tag{1}$$

vengono sostituite dalle equazioni integrali

$$\int_v G_{ik}\, dv = -\chi \int_v T_{ik}\, dv \tag{2}$$

equivalenti alle (1) in ogni regione che non contenga ipersuperfici di discontinuità per le derivate prime dei potenziali; trasformando una parte dell'integrale a primo membro in integrale superficiale le (2) si scrivono in una forma che conserva significato ovunque, in quanto non vi figurano più le derivate seconde dei potenziali, ed è possibile, con un procedimento classico, dedurne le condizioni di raccordo per le derivate prime, subordinatamente alla ipotesi di continuità dei potenziali stessi ed all'ipotesi che anche il secondo membro sia suscettibile di una rappresentazione opportuna.

Il punto di vista adottato da Papapetrou e Treder [10], (cfr. anche [3], [4] e [9]), consiste nel riinterpretare le equazioni di Einstein come equazioni fra distribuzioni (nel senso di Schwartz) laddove viene meno la continuità delle derivate prime dei potenziali, e si riattacca quindi al terzo dei procedimenti indicati da O' Brien e Synge, in quanto equivale a postulare direttamente la validità delle (2), (nella forma in cui si trovano, anziché in una forma trasformata).

In questa Nota ci proponiamo di trattare il medesimo problema facendo uso del secondo tipo di procedimento: otterremo cioè le condizioni di raccordo mediante un passaggio al limite, a partire dalle equazioni gravitazionali e dalle condizioni di raccordo di Lichnerowicz, limitandoci per semplicità al caso di materia disgregata. Controlleremo che, nell'approssimazione newtoniana, dalle condizioni ottenute si desumono le ordinarie condizioni di raccordo per le derivate prime del potenziale newtoniano nell'attraversamento di una 2-superficie materiale.

L'autore ritiene che il punto di vista qui adottato si possa applicare a schemi materiali più generali, e possa facilitare lo studio di alcuni problemi quale, ad esempio, il problema dell'evoluzione in presenza di distribuzioni superficiali di materia, in quanto il procedimento di passaggio al limite fornisce un criterio per trasportare o adattare allo schema ampliato risultati già noti sullo schema abituale.

L'autore è grato al prof. C. Cattaneo per il suo incoraggiamento ed il suo aiuto.

2. Strato di spessore finito.

Consideriamo, nella varietà spazio–tempo V_4, una regione I compresa fra due ipersuperfici $\bar{S}$ ed S del genere tempo. Facciamo l'ipotesi che tale regione sia occupata da materia disgregata, e che pertanto vi siano soddisfatte le equazioni gravitazionali

$$R_{ik} = -\chi\left(T_{ik} - \frac{1}{2}Tg_{ik}\right) \quad , \quad (T \equiv T^i_{\ i}), \tag{3}$$

con un tensore energia–impulso del tipo:

$$T_{ik} = \mu U_i U_k \quad , \quad (U_i U^i = -c^2). \tag{4}$$

Nelle precedenti equazioni g_{ik} ed R_{ik} indicano rispettivamente la generica componente del tensore metrico e del tensore di Riemann contratto, in coordinate locali arbitrarie. Lo scalare μ ed il quadrivettore U^i vanno interpretati rispettivamente come densità propria e quadrivelocità locale della materia.

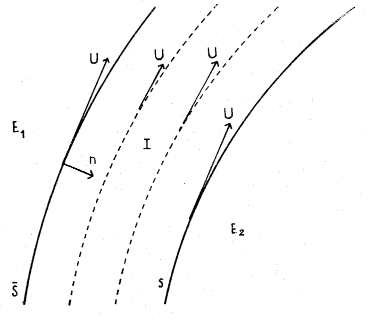


Fig. 1.

Supponiamo che all'esterno della regione I, cioè nelle regioni E_1 ed E_2 (vedi fig. 1), siano soddisfatte le equazioni gravitazionali del vuoto

$$R_{ik} = 0, \tag{5}$$

e che attraverso $\bar{S}$ ed S siano soddisfatte le abituali condizioni di raccordo. In tal caso le ipersuperfici $\bar{S}$ ed S sono necessariamente generate da linee di corrente della materia (Lichnrowicz [7], pag. 64).

Sia $\overline{\Sigma}$ una qualsiasi porzione di $\overline{\mathrm{S}}$; da ogni punto di $\overline{\Sigma}$ spicchiamo l'arco di geodetica normale ad $\overline{\mathrm{S}}$ e congiungente $\overline{\mathrm{S}}$ con S: si viene così ad individuare una regione quadridimensionale $\mathrm{V} \subset \mathrm{I}$, il cui contorno è costituito da $\overline{\Sigma}$, da una

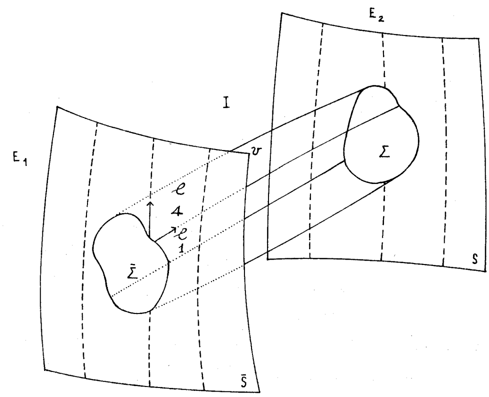


Fig. 2.

porzione Σ di S, e da un tubo di geodetiche normali ad $\overline{\mathrm{S}}$ (fig. 2). A $\overline{\Sigma}$ si può associare la quantità

$$\mathrm{M}\,(\overline{\Sigma}) \equiv \int_{\mathrm{V}} \mathrm{T}\,d\mathrm{V} \tag{6}$$

dove $d\mathrm{V} \equiv \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$ rappresenta l'elemento di volume invariante associato alla metrica ($g \equiv \det g_{ik}$). Tenuto conto della (4) si può anche scrivere:

$$\mathrm{M}\,(\overline{\Sigma}) = -\,c^2 \int_{\mathrm{V}} \mu\, d\mathrm{V}. \tag{7}$$

Detto $d\overline{\Sigma}$ l'elemento superficiale invariante di $\overline{\mathrm{S}}$ associato alla metrica indotta, alla funzione di insieme $\mathrm{M}\,(\overline{\Sigma})$ si può associare una funzione puntuale $\sigma\,(\overline{\mathrm{Q}})$, definita su $\overline{\mathrm{S}}$, in modo tale che per ogni scelta della regione V risulti

$$\mathrm{M}\,(\overline{\Sigma}) = -\,c^2 \int_{\overline{\Sigma}} \sigma\, d\overline{\Sigma}. \tag{8}$$

Per dimostrarlo basta scegliere un sistema di coordinate normali di Gauss $\{\xi^i\}$ relative all'ipersuperficie $\overline{\mathrm{S}}$, in modo tale che la metrica assuma la forma

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \qquad (\alpha\,,\,\beta = 2\,,\,3\,,\,4),$$

e che l'ipersuperficie $\overline{\mathrm{S}}$ stessa sia rappresentata dalla equazione $\xi^1 = 0$ (cfr. [7], pp. 59-60). In tali coordinate l'equazione dell'ipersuperficie S è del tipo $\xi^1 = f(\xi^\alpha)$, e la (7) si può scrivere nella forma

$$\mathrm{M}(\bar{\Sigma}) = -c^2 \int_{\bar{\Sigma}} d\xi^2\, d\xi^3\, d\xi^4 \int_0^{f(\xi^\alpha)} \sqrt{-g(\xi^1, \xi^\alpha)}\, d\xi^1 =$$

$$= -c^2 \int_{\bar{\Sigma}} d\bar{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{-g(0, \xi^\alpha)}} \int_0^{f(\xi^\alpha)} \sqrt{-g(\xi^1, \xi^\alpha)}\, d\xi^1 \equiv \int_{\bar{\Sigma}} \sigma\, d\bar{\Sigma},$$

dove si è posto

$$\sigma(\bar{\mathrm{Q}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(0, \xi^\alpha)}} \int_0^{f(\xi^\alpha)} \sqrt{-g(\xi^1, \xi^\alpha)}\, d\xi^1. \tag{9}$$

Si verifica immediatamente che questa definizione è invariante rispetto a cambiamenti di coordinate del tipo $\xi^{1'} = \xi^1, \xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}(\xi^\alpha)$, $(\alpha = 2, 3, 4)$, e quindi è intrinseca in quanto le coordinate di Gauss sono completamente determinate dall'ipersuperficie $\bar{\mathrm{S}}$ e dalla metrica a meno di tali trasformazioni.

3. Ipersuperficie materiale.

Pensiamo d'ora in poi fissate tanto V_4, come varietà differenziabile, quanto l'ipersuperficie $\bar{\mathrm{S}}$, e supponiamo di poter associare ad ogni valore di un parametro δ, variabile in un intervallo $0 < \delta \leq \delta_0$, un'ipersuperficie $\mathrm{S}(\delta)$, un tensore energia–impulso $\mathrm{T}_{ik}(\delta) \equiv \mu(\delta)\, \mathrm{U}_i(\delta)\, \mathrm{U}_k(\delta)$ ed un tensore metrico $g_{ik}(\delta)$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) δ rappresenti la massima distanza fra $\bar{\mathrm{S}}$ ed $\mathrm{S}(\delta)$, al variare di $\bar{\mathrm{Q}}$ su $\bar{\mathrm{S}}$, calcolata con la metrica $g_{ik}(\delta)$ lungo le geodetiche normali ad S;

b) ad ogni valore di δ corrisponda una situazione analoga a quella considerata al § 2, cioè il tensore $g_{ik}(\delta)$ sia soluzione delle equazioni di Einstein, con tensore energia–impulso uguale a $\mathrm{T}_{ik}(\delta)$ all'interno della regione $\mathrm{I}(\delta)$ limitata da $\bar{\mathrm{S}}$ ed $\mathrm{S}(\delta)$ e nullo fuori di tale regione, e soddisfi le abituali condizioni di raccordo attraverso $\bar{\mathrm{S}}$ ed $\mathrm{S}(\delta)$;

c) al tendere di δ a zero le funzioni $g_{ik}(\delta)$ si mantengano limitate e convergano uniformemente in ogni porzione finita di V_4 verso funzioni $\overset{*}{g}_{ik}$, (che pertanto saranno continue), e le derivate parziali $\partial_l\, g_{ik}(\delta)$ si mantengano limitate e convergano uniformemente tanto nella regione E_1, frontiera inclusa, quanto nella regione complementare $V_4 - E_1 = \mathrm{I}(\delta) \cup E_2(\delta)$ privata della frontiera $\bar{\mathrm{S}}$;

d) detti $\bar{\mathrm{Q}}$ il generico punto di $\bar{\mathrm{S}}$, e $\mathrm{Q}(\delta)$ l'intersezione di $\mathrm{S}(\delta)$ con la geodetica associata alla metrica $\overset{*}{g}_{ik}$ e normale ad $\bar{\mathrm{S}}$ in $\bar{\mathrm{Q}}$ (sempre rispetto alla metrica $\overset{*}{g}_{ik}$), al tendere di δ a zero le funzioni $\partial_i\, \overset{*}{g}_{ik}(\mathrm{Q}(\delta))$ convergano uniformemente verso funzioni $\partial_i\, \overset{*+}{g}_{ik}(\bar{\mathrm{Q}})$ definite su $\bar{\mathrm{S}}$;

e) al tendere di δ a zero le funzioni $\mathrm{U}^i(\bar{\mathrm{Q}}, \delta)$ tendano uniformemente a limiti determinati $\overset{*}{\mathrm{U}}{}^i(\bar{\mathrm{Q}})$ su $\bar{\mathrm{S}}$;

f) al tendere di δ a zero la funzione $\sigma(\bar{Q})$ definita dalla (9), (in cui va d'ora in poi sottintesa la dipendenza da δ), si mantenga limitata e tenda uniformemente ad un limite $\overset{*}{\sigma}(\bar{Q})$ (1).

In tal caso diremo che si è definita nella varietà una ipersuperficie materiale, caratterizzata dall'ipersuperficie $\bar{S}$, dalla funzione $\overset{*}{\sigma}(\bar{Q})$ nonché dal campo di vettori $\overset{*}{U}{}^i$, definito su $\bar{S}$.

4. CONDIZIONI DI RACCORDO.

Consideriamo, in corrispondenza ad ogni valore di δ, un campo di tetradi ortonormali $\left\{\underset{a}{\boldsymbol{e}}(\delta)\right\}$, $(a = 1, 2, 3, 4)$, scelto in modo che $\underset{4}{\boldsymbol{e}}(\delta)$ sia ovunque parallelo ad $\mathbf{U}(\delta)$, $(\mathbf{U}(\delta) \equiv c\,\underset{4}{\boldsymbol{e}}(\delta))$, e che in ogni punto di $\bar{S}$ e di $S(\delta)$ i vettori $\underset{1}{\boldsymbol{e}}(\delta)$ siano normali a dette ipersuperfici, il che è possibile in quanto, come si è già osservato, $\bar{S}$ ed $S(\delta)$ sono generate da linee di corrente. Le equazioni gravitazionali (3) possono scriversi, sottointendendo la dipendenza da δ, nella forma equivalente

$$R_{ik}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k = -\chi\left(T_{ik} - \frac{1}{2}\,T g_{ik}\right)\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k, \qquad (a\,,b = 1\,,2\,,3\,,4). \tag{9}$$

Per integrazione sulla regione $V(\delta)$ si ottiene:

$$\int_V R_{ik}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\,dV = -\chi\int_V\left(T_{ik} - \frac{1}{2}\,T g_{ik}\right)\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\,dV. \tag{10}$$

Facendo uso della espressione esplicita di R_{ik}, l'integrando a primo membro della (10) si trasforma come segue

$$\begin{aligned} R_{ik}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k &= \left(\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{il}\,\Gamma^l_{kr} - \Gamma^r_{ik}\,\Gamma^l_{lr}\right)\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^l_{il}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\right) - \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^l_{ik}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\right) - \Gamma^l_{il}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\right) + \\ &\quad + \Gamma^l_{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k\right) + \left(\Gamma^r_{il}\,\Gamma^l_{kr} - \Gamma^r_{ik}\,\Gamma^l_{lr}\right)\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k. \end{aligned} \tag{11}$$

Applicando il teorema di Green il primo membro della (10) può quindi scriversi nella forma

$$\begin{aligned} \int_{V(\delta)} R_{ik}(\delta)\,\underset{a}{e}{}^i(\delta)\,\underset{b}{e}{}^k(\delta)\,dV(\delta) &= \int_{\Sigma(\delta)}\left(\Gamma^l_{il}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k - \Gamma^k_{ir}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^r\right)\underset{1}{e}_k\,d\Sigma(\delta) - \\ &- \int_{\bar{\Sigma}}\left(\Gamma^l_{il}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^k - \Gamma^k_{ir}\,\underset{a}{e}{}^i\,\underset{b}{e}{}^r\right)\underset{1}{e}_k\,d\bar{\Sigma}(\delta) + \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

(1) Si osservi che il punto di vista qui adottato consente di *definire* la funzione $\overset{*}{\sigma}(\bar{Q})$ a partire dalle quantità $g_{ik}(\delta)$ e $\mu(\delta)$, che hanno un preciso significato fisico per $\delta > 0$.

dove $d\overline{\Sigma}(\delta)$ e $d\Sigma(\delta)$ rappresentano gli elementi di superficie invarianti di $\overline{S}$ ed S rispettivamente associati alla metrica $g_{ik}(\delta)$, ed i termini omessi sono tutti integrali che tendono a zero per $\delta \rightarrow 0$, in quanto tendono a zero i rispettivi campi di integrazione, mentre le funzioni integrande, per l'ipotesi *c*) del paragrafo 3), si mantengono limitate.

D'altra parte, per il modo in cui sono state scelte le tetradi $\left\{ \underset{a}{e}(\delta) \right\}$, e tenendo presenti le (4), (6) e (8), si riconosce subito che per il secondo membro della (8) si ha:

$$(13) \qquad -\chi \int_V \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}\right) \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^k \, dV = \begin{cases} 0 & \text{per } a \neq b \\ -\dfrac{c^2 \chi}{2} \displaystyle\int_{\overline{\Sigma}} \sigma \, d\overline{\Sigma} & \text{per } a = b. \end{cases}$$

La (8) stessa può quindi scriversi nella forma

$$(14) \qquad \int_{\Sigma(\delta)} \left(\Gamma^l_{il} \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^k - \Gamma^k_{ir} \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^r \right) \underset{1}{e_k} \, d\Sigma(\delta) - \int_{\overline{\Sigma}} \left(\Gamma^l_{il} \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^k - \Gamma^k_{ir} \underset{a}{e}^i \underset{b}{e}^r \right) \underset{1}{e}^k \, d\overline{\Sigma}(\delta) +$$

$$+ \cdots = -\frac{c^2 \chi}{2} \delta_{ab} \int_{\overline{\Sigma}} \sigma \, d\overline{\Sigma}.$$

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0$, e ponendo in ogni punto $\overline{Q}$ di $\overline{S}$:

$$[\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}] = \overset{*}{\Gamma}{}^{i+}_{jk} - \overset{*}{\Gamma}{}^{i-}_{jk},$$

con $\overset{*}{\Gamma}{}^{i+}_{jk} \equiv \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{ir} (\partial_j \overset{*}{g}{}^{+}_{rk} + \partial_k \overset{*}{g}{}^{+}_{rj} - \partial_r \overset{*}{g}{}^{+}_{jk})$, (cfr. § 3, *c*) e *d*)),

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i-}_{jk}(\overline{Q}) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{ir} (Q(\delta)) (\partial_j g_{rk}(Q;\delta) + \partial_k g_{rj}(Q,\delta) - \partial_r g_{jk}(Q;\delta)),$$

la (12) dà

$$(15) \qquad \int_{\overline{\Sigma}} \left([\overset{*}{\Gamma}{}^l_{il}] \underset{a}{\overset{*}{e}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{e}}{}^k \underset{1}{\overset{*}{e}}_k - [\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ir}] \underset{a}{\overset{*}{e}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{e}}{}^r \underset{1}{\overset{*}{e}}_k \right) d\overset{*}{\Sigma} = -\frac{c^2 \chi}{2} \delta_{ab} \int_{\overline{\Sigma}} \overset{*}{\sigma} \, d\overset{*}{\Sigma},$$

dove $\underset{a}{\overset{*}{e}}{}^i \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \underset{a}{e}^i(\delta)$.

Dall'arbitrarietà di $\overline{\Sigma}$ seguono infine le equazioni locali, valide in ogni punto di $\overline{S}$:

$$(16) \qquad [\overset{*}{\Gamma}{}^l_{il}] \underset{a}{\overset{*}{e}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{e}}{}^k \underset{1}{\overset{*}{e}}_k - [\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ir}] \underset{a}{\overset{*}{e}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{e}}{}^r \underset{1}{\overset{*}{e}}_k = -\frac{c^2 \chi}{2} \overset{*}{\sigma} \delta_{ab}.$$

Le (16) fanno intervenire il tensore $[\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}]$ che rappresenta i salti dei simboli di Christoffel costruiti con la metrica $\overset{*}{g}_{ik}$ attraverso l'ipersuperficie $\overline{S}$.

Per completare la determinazione delle condizioni di raccordo attraverso $\overline{S}$, introduciamo un sistema di coordinate locali $\{x^i\}$ tale che $\overline{S}$ e le superfici

$S(\delta)$ abbiano equazioni $x^1 =$ costante. Segue allora immediatamente dalla condizione *d*) del § 3 che le funzioni $\partial_\varrho \overset{*}{g}_{ik}$ (ϱ ed ogni altro indice greco $= 2, 3, 4$), sono continue attraverso $\bar{S}$. D'altra parte si ha, con evidente significato dei simboli:

$$\partial_\varrho \overset{*}{g}_{kl} = \overset{*}{\Gamma}_{k,\varrho l} + \overset{*}{\Gamma}_{l,\varrho k} \tag{17}$$

e quindi anche, per la continuità delle $\partial_\varrho \overset{*}{g}_{kl}$

$$[\overset{*}{\Gamma}_{k,\varrho l}] + [\overset{*}{\Gamma}_{l,\varrho k}] = 0. \tag{18}$$

Poiché, nelle coordinate usate, i vettori $\underset{\alpha}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}$ hanno componenti controvarianti di indice 1 nulle, dalle (16) si ottiene

$$([\overset{*}{\Gamma}_{k,\varrho l}] + [\overset{*}{\Gamma}_{l,\varrho k}])\, \underset{a}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^k \underset{\alpha}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^\varrho \underset{b}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^l = ([\overset{*}{\Gamma}_{k,il}] + [\overset{*}{\Gamma}_{l,ik}])\, \underset{a}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^k \underset{\alpha}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^l = 0.$$

o equivalentemente

$$[\overset{*}{\Gamma}{}^k_{il}]\, \underset{a}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}_k \underset{\alpha}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^i \underset{b}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^l + [\overset{*}{\Gamma}{}^l_{ik}]\, \underset{b}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}_l \underset{\alpha}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^i \underset{a}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^k = 0. \tag{19}$$

È chiaro che le (19) non dipendono più dalle particolari coordinate usate.

Le (16) e le (19) esprimono, nel loro complesso, le condizioni di raccordo cercate. Si tratta di 40 equazioni indipendenti che legano la funzione $\overset{*}{\sigma}$ alle 40 componenti indipendenti del tensore $[\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kl}]$.

Osserviamo che le curve di $\bar{S}$ tangenti al campo di vettori $\overset{*}{U}{}^i$ non possono essere simultaneamente geodetiche di V_4 rispetto alla connessione riemanniana di coefficienti $\overset{*}{\Gamma}{}^{i+}_{jk}$, e rispetto a quella di coefficienti $\overset{*}{\Gamma}{}^{i-}_{jk}$. Infatti, se lo fossero, i vettori $\overset{*}{U}{}^i$ dovrebbero soddisfare, nelle coordinate $\{x^i\}$ pocanzi considerate in cui $\overset{*}{U}{}^1 = 0$, tanto le equazioni

$$\frac{\partial \overset{*}{u}{}^i}{\partial x^\alpha} \overset{*}{u}{}^\alpha + \overset{*}{\Gamma}{}^{i+}_{\gamma\delta} \overset{*}{u}{}^\gamma \overset{*}{u}{}^\delta = 0$$

quanto le equazioni

$$\frac{\partial \overset{*}{u}{}^i}{\partial x^\alpha} \overset{*}{u}{}^\alpha + \overset{*}{\Gamma}{}^{i-}_{\gamma\delta} \overset{*}{u}{}^\gamma \overset{*}{u}{}^\delta = 0.$$

Sottraendo membro a membro e tenendo presente il parallelismo di $\overset{*}{U}$ con $\underset{4}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}$, si avrebbe allora

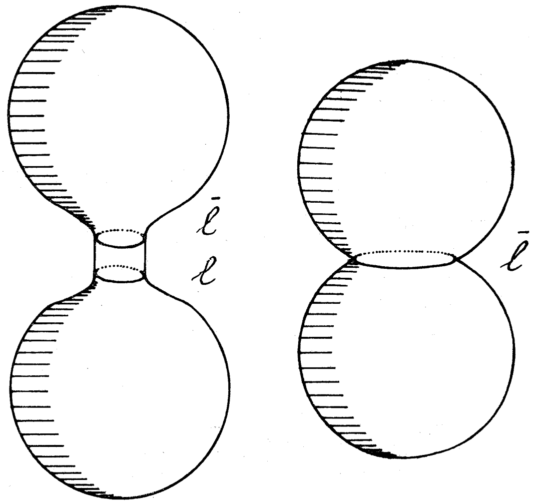
$$[\overset{*}{\Gamma}{}^i_{\gamma\delta}]\, \underset{4}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^\gamma \underset{4}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^\delta = [\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kl}]\, \underset{4}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^k \underset{4}{\overset{*}{\boldsymbol{e}}}{}^l = 0$$

e quindi anche

$$[\overset{*}{\Gamma}{}^i_{kl}]\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^k\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^l\, \underset{1}{\overset{*}{e}}{}_i = 0,$$

in contraddizione con la (14) scritta per $a = b = 4$.

Sotto questo aspetto la situazione è analoga a quella che si verifica nell'esempio bidimensionale della fig. 3.



a) *b*)

Fig. 3. – Per la superficie *a*) le curve l ed $\bar{l}$ appartengono ad una famiglia di geodetiche che generano la porzione cilindrica della superficie di collegamento fra le due sfere. Deformando la superficie *a*) si può ottenere, al limite, la superficie *b*), ed è chiaro che la curva $\bar{l}$, lungo la quale la superficie *b*) è singolare, non è una geodetica né per l'una né per l'altra delle due regioni sferiche a contatto.

5. Approssimazione newtoniana.

Mostreremo ora che, nelle condizioni in cui ci si pone abitualmente per riottenere i risultati classici in prima approssimazione, (spazio–tempo stazionario, campo gravitazionale debole, sforzi interni trascurabili in confronto a μc^2), si ritrovano le condizioni di raccordo per il potenziale newtoniano attraverso una 2–superficie materiale.

Sia γ il campo di vettori che individua il riferimento fisico adattato alla stazionarietà dello spazio–tempo (cfr. Cattaneo [1]): in ogni punto di $\bar{S}$ si avrà $\gamma = \underset{4}{\overset{*}{e}}$.

In coordinate adattate alla stazionarietà di V_4, dalla (14), scritta per $a = b = 4$, si ha

$$[\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ir}]\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^i\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^r\, \underset{1}{\overset{*}{e}}{}_k = \frac{c^2 \chi}{2}\, \overset{*}{\sigma}$$

ovvero

$$(20) \qquad [\overset{*}{\Gamma}{}_{k,ir}]\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^i\, \underset{4}{\overset{*}{e}}{}^r\, \underset{1}{\overset{*}{e}}{}^k = -\frac{1}{2}\, [\partial_4 \overset{*}{g}_{44}]\, \underset{1}{\overset{*}{e}}{}^k = \frac{c^2 \chi}{2}\, \overset{*}{\sigma}.$$

D'altra parte è noto che, nelle condizioni in cui ci siamo posti, la quantità $-c^2 \log(-\overset{*}{g}_{44})^{1/2}$ va identificata con il potenziale newtoniano U, (cfr. Cattaneo [2], p. 200), per cui si ha, in prima approssimazione,

$$\overset{*}{g}_{44} = -\,\boldsymbol{e}^{-\frac{2U}{c^2}} \cong -1 + \frac{2U}{c^2},$$

$$\partial_k \overset{*}{g}_{44} = \frac{2}{c^2}\,\partial_k U,$$

e per sostituzione nella (18),

$$\overset{*}{\underset{1}{\boldsymbol{e}}}{}^k\,[\partial_k U] = -\frac{\chi c^4}{2}\,\overset{*}{\sigma}. \tag{21}$$

A primo membro della (21) figura la derivata normale di U rispetto ad $\overline{S}$, ovvero la derivata di U secondo la normale $\boldsymbol{n}$ a γ e all'elemento di 2-superficie individuato da $\overline{S}$ e normale a γ. Facendo figurare a secondo membro la costante newtoniana di gravitazione $k = c^4\chi/8\pi$, la (19) si riduce in definitiva alla condizione classica

$$\left[\frac{dU}{dn}\right] = -4\pi k\overset{*}{\sigma}.$$

Infine la (19), equivalente alla (17), esprime, per $a = b = 4$, la continuità delle derivate tangenziali di U rispetto ad $\overline{S}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. CATTANEO, «Nuovo cimento», *10*, 318 (1958).
[2] C. CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione* (Veschi, Roma).
[3] G. DARTCOURT, «Math. Nachr.», *27*, 277 (1964).
[4] W. ISRAEL, «Nuovo Cimento», *44 B*, 1 (1966).
[5] C. LANCZOS, «Phys. Zeits.», *23*, 539 (1922).
[6] C. LANCZOS, «Ann. d. Phys.», *74*, 518 (1924).
[7] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, (Masson, Paris 1955).
[8] S. O' BRIEN e J. L. SYNGE, Commun. Dublin, Inst. Adv. Stud. A, n. 9 (1952).
[9] A. PAPAPETROU e A. HAMOUI, Preprint (1968).
[10] A. PAPAPETROU e H. TREDER, «Math. Nachr.», *20*, 53 (1959).