Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mehmet Namik Oğuztöreli, Demetrio Mangeron

Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.1-2, p. 1–6.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1968 (Luglio–Agosto)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Teoria del controllo. — *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti* (*). Nota I di Mehmet Namik Oğuztöreli [1] e Demetrio Mangeron [2], [3], presentata (**) dal Socio M. Picone.

Summary. — An optimization problem concerning a distributed parameter control system is discussed. The results of the paper [2] are extended.

1. – Descrizione del sistema di controllo. Sia S un dato sistema di controllo ad una sola dimensione, definito nell'intervallo $J \equiv \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Sia inoltre $I = [t_0, t_1]$ un intervallo temporale dato. Supponiamo che lo stato del sistema S al momento $t \in I$ sia descritto dalla $u = u(t, x; v)$, che è una funzione ordinaria rispetto a (t, x) ed un funzionale in $v \in V$, ove V è un sottospazio immerso in uno spazio dato di funzioni continue su $I \times J$. Più

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Department of Mathematics. The University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(2) Polytechnic Institute of Jassy. Socialist Republic of Romania. At present Visiting Professor at the University of Alberta. Edmonton, Alberta, Canada.

(3) The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

precisamente, supponiamo che sia

$$u(t, x; v) = \varphi(t, x) + \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_1(t, x; \sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi \tag{I.1}$$

$$+ \frac{\lambda}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_2(t, x; \sigma_1, \xi_1; \sigma_2, \xi_2)\, v(\sigma_1, \xi_1)\, v(\sigma_2, \xi_2)\, d\sigma_1\, d\xi_1\, d\sigma_2\, d\xi_2$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{\lambda^{n-1}}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \cdots \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_n(t, x; \sigma_1, \xi_1, \cdots, \sigma_n, \xi_n)\, v(\sigma_1, \xi_1) \cdots v(\sigma_n, \xi_n)\, d\sigma_1\, d\xi_1 \cdots d\sigma_n\, d\xi_n$$

$$+ \cdots,$$

ove λ è un parametro reale, $\varphi(t, x)$ è una funzione continua data, continuamente differenziabile rispetto a $(t, x) \in I \times J$, $K_n(t, x; \sigma_1, \xi_1, \cdots, \sigma_n, \xi_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ sono funzioni date continue in $t, x, \sigma_1, \xi_1, \cdots, \sigma_n, \xi_n$ e continuamente differenziabili rispetto a t ed x per (t, x), $(\sigma_1, \xi_1), \cdots, (\sigma_n, \xi_n)$. Le serie che compaiono nella (I.1) come pure le serie che corrispondono a $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ sono supposte uniformemente convergenti per $(t, x) \in I \times J$ e $|\lambda| \leq R$, essendo R un numero positivo. Assumiamo inoltre che i nuclei $K_n(t, x; \sigma_1, \xi_1; \cdots; \sigma_n, \xi_n)$ siano simmetrici rispetto a (σ_1, ξ_1), (σ_2, ξ_2), $\cdots$ $\cdots$ (σ_n, ξ_n). Ogni funzione $v = v(t, x)$ sarà chiamata un *controllo ammissibile.*

II. – Problema ottimale. Assumiamo che il comportamento del sistema S sottoposto al controllo $v \in V$ è misurato dal funzionale avente la forma

$$F(u, v, u_t, u_x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b Q(u(t, x), v(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), t, x)\, dt\, dx, \tag{II.1}$$

ove $Q = Q(u, v, u_t, u_x, t, x)$ è una data funzione non negativa, continua in t ed x, continuamente differenziabile rispetto a u, v, u_t e u_x per $(t, x) \in I \times J$, $v \in V$, essendo la $u = u(t, x; v)$ data mediante l'equazione (I.1). Allora, il nostro problema di ottimizzazione può essere formulato come segue:

Problema di ottimizzazione. Trovare, sotto le ipotesi di cui sopra, un controllo ammissibile $v^0 \in V$ per il quale il funzionale $F(u, v, u_t, u_x)$ assuma il suo minimo, e cioè,

$$F(u^0, v^0, u_t^0, u_x^0) = \min_{v \in V} F(u, v, u_t, u_x), \tag{II.2}$$

ove si è posto $u \equiv u(t, x; v)$ e $u^0 \equiv u(t, x; v^0)$.

Ogni controllo ammissibile $v^0 \in V$ per il quale è valida l'equazione (II.2) sarà chiamato un *controllo ottimale.* L'esistenza di un controllo ottimale può essere dimostrata sotto condizioni molto generali concernenti l'insieme V.

In questa Nota ci occuperemo soltanto, facendo uso della programmazione dinamica, delle condizioni necessarie per l'ottimalità spettanti ad un controllo ammissibile.

III. – Applicazione del principio di ottimalità. Indichiamo con

$$f(t_0, t_1) = \min_{v \in V} F(u, v, u_t, u_x) \tag{III.1}$$

il fatto che l'operazione di ottimizzazione rispetto a $v \in V$ concernente la (II.2) si eseguisce nell'intervallo $I = [t_0, t_1]$. Più generalmente sia τ un punto qualunque appartenente ad I. Poniamo $I_\tau = [\tau, t_1]$ e definiamo

$$f(\tau, t_1) = \min_{v \in V} \left\{ \int_\tau^{t_1} \int_a^b Q(u(t,x), v(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), t, x)\, dt\, dx \right\}. \tag{III.2}$$

Sia Δ un piccolo intervallo discreto spettante al tempo t. Procediamo ora alla suddivisione dell'intervallo I_τ in due parti, e precisamente $I''_\tau = [\tau, \tau + \Delta]$ e $I_{\tau+\Delta} = [\tau + \Delta, t_1]$. Facendo uso delle ipotesi assunte nei §§ I–II, si ricava

$$\begin{aligned} f(\tau, t_1) &= \min_{v \in V} \left\{ \int_\tau^{\tau+\Delta} \int_a^b Q(u, v, u_t, u_x, t, x)\, dt\, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau+\Delta}^{t_1} \int_a^b Q(u, v, u_t, u_x, t, x)\, dt\, dx \right\} \\ &= \min_{v \in V} \left\{ \Delta \int_a^b Q(u(\theta, x), v(\theta, x), u_t(\theta, x), u_x(\theta, x), \theta, x)\, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau+\Delta}^{t_1} \int_a^b Q(u(t,x), v(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), t, x)\, dt\, dx \right\}, \end{aligned} \tag{III.3}$$

ove $\tau \leq \theta \leq \tau + \theta$. Procedendo adesso all'applicazione del principio di ottimalità di R. Bellman [1], si ottiene

$$\begin{aligned} f(\tau, t_1) &= f(\tau + \Delta; t_1) + \\ &+ \Delta \min_{v \in V} \left\{ \int_a^b Q(u(\theta, x), v(\theta, x), u_t(\theta, x), u_x(\theta, x), \theta, x)\, dx \right\}, \end{aligned} \tag{III.4}$$

donde si ricava la seguente equazione funzionale:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau, t_1) = \min_{v \in V} \left\{ \int_a^b Q(u(\tau, x), v(\tau, x), u_t(\tau, x)\, u_x(\tau, x), \tau, x)\, dx \right\}. \tag{III.5}$$

E pertanto, controlli ottimali si trovano tra i controlli $v \in \mathrm{V}$ per i quali il funzionale

$$\text{(III.6)} \qquad \mathrm{G}(v\,;\tau) = -\int_a^b \mathrm{Q}\,(u(\tau,x),v(\tau,x),u_t(\tau,x),u_x(\tau,x),\tau,x)\,dx$$

assume il suo minimo per ogni $\tau \in \mathrm{I}$.

IV. – Condizioni necessarie di ottimalità. Sia $v \in \mathrm{V}$ un punto estremo per il funzionale $\mathrm{G}(v\,;\tau)$, $\tau \in \mathrm{I}$. Abbiamo, per conseguenza,

$$\text{(IV.1)} \qquad \delta_v \mathrm{G}(v\,;\tau) = 0\,,$$

ove $\delta_v \mathrm{G}$ denota la prima variazione del funzionale G rispetto a v. Si ha inoltre, per ogni $\tau \in \mathrm{I}$,

$$\delta_v \mathrm{G}(v\,;\tau) = -\int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\delta_v u + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_t}\,\delta_v u_t + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\delta_v u_x \right\} dx\,,$$

ove $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q}\,(u(\tau,x),v(\tau,x),u_t(\tau,x),u_x(\tau,x),\tau,x)$ e $\delta v = \delta v(t,x)$ è una funzione continua arbitraria per $(t,x) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ e tale che si abbia $v + \delta v \in \mathrm{V}$. E pertanto, in concordanza con l'equazione (IV.1), controlli ottimali sono da ricercarsi tra le funzioni $v \in \mathrm{V}$ per le quali ha luogo, per ogni $\tau \in \mathrm{I}$ e per ogni incremento ammissibile arbitrario δv, l'eguaglianza

$$\text{(IV.2)} \qquad \int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u}\,\delta_v u + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_t}\,\delta_v u_t + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u_x}\,\delta_v u_x \right\} dx = 0\,.$$

È chiaro che l'equazione (IV.1) esprime soltanto una condizione necessaria per un punto estremo $v \in \mathrm{V}$ pel funzionale $\mathrm{G}(v\,;\tau)$.

Ora, poiché $u = u(t,x\,;v)$ è data mediante l'equazione (I.1), si ha

$$\text{(IV.3)} \qquad \delta_v u(t,x\,;v) = \int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b \mathrm{K}(t,x\,;\sigma,\xi)\,\delta v(\sigma,\xi)\,,$$

ove il nucleo $\mathrm{K}(t,x\,;\sigma,\xi)$, rappresentato tramite

$$\begin{aligned}
\text{(IV.4)} \qquad \mathrm{K}(t,x\,;\sigma,\xi) &= \mathrm{K}_1(t,x\,;\sigma,\xi) \\
&+ \frac{\lambda}{1!}\int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b \mathrm{K}_2(t,x\,;\sigma_1,\xi_1\,;\sigma,\xi)\,v(\sigma_1,\xi_1)\,d\sigma_1\,d\xi_1 \\
&+ \frac{\lambda^2}{2!}\int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b\!\int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b \mathrm{K}_3(t,x\,;\sigma_1,\xi_1\,;\sigma_2,\xi_2\,;\sigma,\xi)\,v(\sigma_1,\xi_1)\,v(\sigma_2,\xi_2)\,d\sigma_1\,d\xi_1\,d\sigma_2\,d\xi_2 \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{\lambda^n}{n!}\int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b \cdots \int_{t_0}^{t_1}\!\int_a^b \mathrm{K}_{n+1}(t,x\,;\sigma_1,\xi_1,\cdots,\sigma_n,\xi_n\,;\sigma,\xi)\,v(\sigma_1,\xi_1)\cdots \\
&\cdots v(\sigma_n,\xi_n)\,d\sigma_1\,d\xi_1\cdots d\sigma_n\,d\xi_n + \cdots,
\end{aligned}$$

è, in virtù delle ipotesi del § 1, continuo in t, x, σ, ξ e continuamente differenziabile rispetto a t ed x per (t, x), $(\sigma, \xi) \in I \times J$. Conseguentemente, se ne ricava per $(t, x) \in I \times J$

$$\delta_v u_t(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_t(t, x; \sigma, \xi)\, \delta v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi, \tag{IV.5}$$

$$\delta_v u_x(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K_x(t, x; \sigma, \xi)\, \delta v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi. \tag{IV.6}$$

Ciò stabilito, combinando le equazioni (IV.2), (IV.3), (IV.5) e (IV.6) e cambiando convenientemente l'ordine d'integrazione, si ottiene, per $\tau \in I$,

$$\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial v}\, \delta v(\tau, x)\, dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b H(\tau; \sigma, \xi)\, \delta v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi = 0, \tag{VI.7}$$

ove si è posto

$$H(\tau; \sigma, \xi) = \tag{IV.8}$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u} K(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_t} K_t(\tau, x; \sigma, \xi) + \frac{\partial Q}{\partial u_x} K_x(\tau, x; \sigma, \xi) \right\} dx.$$

Si può dimostrare che l'equazione (IV.7) è valida per ogni continuo incremento $\delta v(t, x)$ allora ed allora soltanto se si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = 0 \quad \text{e} \quad H(\tau; \sigma, \xi) = 0 \tag{IV.9}$$

per $\tau \in I$, $(\sigma, \xi) \in I \times J$ (cfr. [2]). E pertanto

Controlli ottimali si trovano tra controlli ammissibili soddisfacenti simultaneamente le equazioni (IV.9).

V. – ESEMPIO. Supponiamo che lo stato del sistema S è descritto per (t, x) tramite l'equazione

$$u(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K(t, x; \sigma, \xi)\, v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi, \tag{V.1}$$

ove il nucleo $K(t, x; \sigma, \xi)$ è simmetrico rispetto a (t, x) e (σ, ξ) e soddisfa le condizioni generali del § 1. Sia il funzionale–costo F associato al sistema S espresso mediante il seguente funzionale quadratico

$$F(u, v, u_t, u_x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \{u^2 - 2uv + \mu v^2 + u_t^2 + u_x^2\}\, dt\, dx, \tag{V.2}$$

ove μ è un numero reale maggiore di 1. Assumiamo che $v(t, x) \equiv 0$ non è ammissibile. In questo caso abbiamo, tenendo conto della prima delle equazioni (IV.9)

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \mathrm{K}(t, x; \sigma, \xi)\, v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi = \mu v(t, x). \tag{V.3}$$

Si ha inoltre, per $\tau \in \mathrm{I}$, $(\sigma, \xi) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, tenendo conto della seconda delle equazioni (IV.9),

$$\int_{a}^{b} \{(\mu - 1)\, v(\tau, x)\, \mathrm{K}(\tau, x; \sigma, \xi) + u_t(\tau, x)\, \mathrm{K}_t(\tau, x; \sigma, \xi) + \\ + u_x(\tau, x)\, \mathrm{K}_x(\tau, x; \sigma, \xi)\}\, dx = 0. \tag{V.4}$$

e dunque, controlli ottimali si trovano tra le autosoluzioni dell'operatore integrale T

$$\mathrm{T}(v)(t, x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \mathrm{K}(t, x; \sigma, \xi)\, v(\sigma, \xi)\, d\sigma\, d\xi, \tag{V.5}$$

soddisfacenti anche all'equazione (V.4).

VI. – OSSERVAZIONI. 1. Le condizioni spettanti alle funzioni ed alle serie figuranti nella descrizione del sistema di controllo, § I, possono essere indebolite. Questo però non costituiva la nostra preoccupazione nella presente Nota.

2. Nella serie di Note successive esporremo i nostri risultati conseguiti nello studio dei problemi ottimali polivibranti, caratterizzati dalla presenza dell'operatore differenziale d'ordine superiore sotto la forma di *derivata totale* nel senso di Picone [3], [4], spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. E. BELLMAN. *Dynamic Programming*, Princeton University Press. Princeton, N. J. 1957.

[2] M. N. OĞUZTÖRELİ. *Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *44* (1968).

[3] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. Univ. Jassy », 1ª sez., XXVI, *1*, 183–232 (1940).

[4] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELİ, *Programmazione dinamica di una classe di problemi al contorno concernenti equazioni polivibranti*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. 8ª, *44* (1968).