Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Da Prato

Somme de générateurs infinitésimaux de classe C_0

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.1-2, p. 14–21.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_14_0>

Analisi matematica. — *Somme de générateurs infinitésimaux de classe* C_0. Nota [*] di GIUSEPPE DA PRATO, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Si danno due generatori infinitesimali A e B di semi gruppi di classe C_0 e si studiano le proprietà spettrali di $A+B$; i risultati ottenuti sono utilizzati per risolvere l'equazione di evoluzione $u'(t) - B(t)u = f$, $B(t)$ essendo generatore di un semi gruppo di classe C_0 che verifica delle condizioni convenienti.

1. UN THÉORÈME DE CARACTÉRISATION POUR LA SOMME DE DEUX GÉNÉRATEURS.

1.1. *Données.*

On donne un espace de Banach complexe X (norme $\| \ \|$) et deux opératéurs linéaires fermés A et B dans X générateurs infinitésimaux de semi-groupes de classe C_0; il existe donc quatre nombres réels $\omega_A, \omega_B, M_A, M_B$ tels que [1]:

$$\|e^{tA}\| \leq M_A e^{\omega_A t} \qquad \|e^{tB}\| \leq M_B e^{\omega_B t} \qquad \forall t \in \overline{\mathbf{R}}_+ \text{ (2)} \tag{1.1}$$

On suppose que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Il existe } \lambda_0 \in R \textit{ tel que } \rho(A_n + B) \supset \lambda_0 + \mathbf{C}_+ \text{ (3)} \quad \forall n \in \mathbf{N} \textit{ et une} \\ \textit{fonction } N : \mathbf{C} \to \mathbf{R} \textit{ telle que } \|R(\lambda, A_n + B)\| \leq N(\lambda) \quad \forall \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+, \\ n \in \mathbf{N} \textit{ et } \lim\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty} N(\lambda) = 0. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Remarquons que si $M_A = M_B = 1$, c'est-à-dire si $A - \omega_A$ et $B - \omega_B$ sont générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contraction alors (1.2) est satisfaite avec $\lambda_0 = \omega_A + \omega_B$ et $N(\lambda) = 1/(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega_A - \omega_B)$ [1].

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1968.

(1) Si L est un opèrateur linéaire dans X, D_L est son domaine, $\rho(L)$ est l'ensemble résolvant, $\sigma(L)$ est le spèctre et $R(\lambda, L)$ est le résolvant de L; si L est fermable $\overline{L}$ est sa fermature et si L est générateur d'un semi-groupe de classe C_0, e^{tL} est le semi-groupe engendré par L.

(2) $\mathbf{N}$ est l'ensemble des nombres naturels, $\mathbf{R}$ (résp. $\mathbf{R}_+$, résp. $\overline{\mathbf{R}}_+$) des nombres réels (résp. réels positifs, résp. réels non négatifs), $\mathbf{C}$ des nombres complexes, $\mathbf{C}_+$ (résp. $\overline{\mathbf{C}}_+$) des nombres complexes de partie réelle positive (résp. non négative).

(3) A_n et B_n sont les opérateurs «approchants» de Yosida [8]: $A_n = n^2 R(n, A) - n$ $B_n = n^2 R(n, B) - n$.

1.2. *Majoration à priori.*

Supposons que (1.2) ait lieu, prenons x dans $D_A \cap D_B$ et λ dans $\lambda_0 + \mathbf{C}_+$ et posons $y = \lambda x - Ax - Bx$, on a:

$$x - R(\lambda, A_n + B)\, y = R(\lambda, A_n + B)\,((A - A_n)\, x) \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{1.3}$$

En grâce de (1.2) on en déduit alors:

$$x = \lim_{n \to \infty} R(\lambda, A_n + B)\,(\lambda x - Ax - Bx) \tag{1.4}$$

d'où

$$\|x\| \leq N(\lambda)\, \|\lambda x - Ax - Bx\| \qquad \forall x \in D_A \cap D_B\,,\ \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+ \tag{1.5}$$

On a alors démontré le théorème:

THÉORÈME 1.1. – *Si l'on suppose que* (1.2) *ait lieu alors la majoration* (1.5) *est valable.*

1.3. *Le théorème de caractérisation.*

THÉORÈME 1.2. – *Si l'on suppose que* (1.2) *ait lieu alors les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $D_A \cap D_B$ *est dense dans* X, $A + B$ (*avec domaine* $D_A \cap D_B$) *est fermable*, $\rho(\overline{A+B}) \supset \lambda_0 + \mathbf{C}_+$ *et*:

$$\|R(\lambda, \overline{A+B})\| \leq N(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+ \tag{1.6}$$

(ii) $D_A \cap D_B$ *est dense dans* X *et il existe* $\omega \geq \lambda_0$ *tel que* $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ *est dense dans* X *pour tout* $\lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$.

1.4. *Démonstration du théorème 1.2.*

(i) $\rightarrow$ (ii). Nous montrerons que (ii) est satisfaite avec $\omega = \lambda_0$; soit alors $\lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$ et $x' \in X'$ [(4)] tel que $\langle \lambda x - Ax - Bx, x' \rangle = 0$ $\forall x \in D_A \cap D_B$, il suffit de démontrer que $x' = 0$. En effet si $x \in D_{\overline{A+B}}$ on a $\langle \lambda x - \overline{A+B}x, x' \rangle = 0$ et si y est un élément arbitraire de X en posant $x = R(\lambda, \overline{A+B})\, y$ on obtient $\langle y, x' \rangle = 0$ ce qui entraîne $x' = 0$.

(ii) $\rightarrow$ (i). Soit $\lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$, $L = A + B$, (1.5) s'écrit alors

$$\|x\| \leq N(\lambda)\, \|\lambda x - Lx\| \qquad \forall x \in D_L \tag{1.7}$$

il s'en suit que $\lambda - L$ est inversible et que:

$$\|(\lambda - L)^{-1} y\| \leq N(\lambda)\, \|y\| \qquad \forall y \in (\lambda - L)(D_L) \tag{1.8}$$

(4) X' est le dual topologique de X.

Comme $(\lambda - L)(D_L)$ est dense dans X $(\lambda - L)^{-1}$ est prolongéable à un opérateur $F(\lambda)$ borné dans X et tel que:

$$
(1.9) \qquad \begin{cases} F(\lambda)(\lambda - L)\,x = x & \forall x \in D_L \\ (\lambda - L)\,F(\lambda)\,x = x & \forall x \in (\lambda - L)(D_L) \\ \| F(\lambda) \| \leq N(\lambda) & \forall \lambda \in \omega + \mathbf{C}_+ \end{cases}
$$

Si $y \in (\lambda - L)(D_L)$ on a d'après (1.4) (avec $x = F(\lambda)\,y$) $F(\lambda)\,y = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n + B)\,y$ et, d'après un théorème de Vitali ([5] p. 104):

$$
(1.10) \qquad F(\lambda) = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n + B) \qquad \text{dans} \quad \lambda_0 + \mathbf{C}_+
$$

ce qui entraîne que $F : \lambda \to F(\lambda)$ est un pseudo-résolvant; on va maintenant montrer qu'il est le résolvant d'un opérateur fermé.

Soit $\lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$ et $n \in \mathbf{N}$, alors en grâce de l'identité $nF(n)\,F(\lambda) = \lambda F(\lambda)\,F(n) - F(n) + F(\lambda)$ et de (1.9) on obtient $\lim_{n\to\infty} nF(n)\,F(\lambda)\,x = F(\lambda)\,x$; puisque $F(\lambda)(X) \supset D_L$ et D_L est dense dans X, compte tenu de (1.9) il s'en suit

$$
(1.11) \qquad \lim_{n\to\infty} nF(n)\,x = x.
$$

Nous pouvons maintenant démontrer que $F(\lambda)$ est injectif; en effet si $F(\lambda)\,x = 0$ on a $\dfrac{d^k F(\lambda)\,x}{d\lambda^k} = (-1)^k k!\, F^k(\lambda)\,x = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ ce qui entraîne (d'après une bien connue propriété des fonctions analytiques) $F(n)\,x = 0$ $\forall n > \omega$ et donc (d'après (1.11)) $x = 0$.

F, étant injectif, est le résolvant d'un opérateur fermé ([5], p. 185) qu'on appelle S.

Il nous reste à démontrer que L est fermable et que S est sa fermature. S est une extension de L, en effet si $x \in D_L$ d'après (1.10) on a:

$$
(1.12) \qquad R(\lambda, S)(\lambda - L)\,x =
$$
$$
= x + \lim_{n\to\infty} \{R(\lambda, A_n + B_n)((A_n x - Ax) + (B_n x - Bx))\} = x
$$

d'où $x \in D_S$ et $Lx = Sx$.

Puisque S est fermé L est fermable, en outre si $x \in D_S$ il existe une suite $\{y_n\}$ dans $(\lambda - L)(D_L)$ (qui est dense dans X) convergente vers $(\lambda - S)\,x$, posons $x_n = R(\lambda, S)\,y_n$, on verifie facilement que $x_n \to x$ et $Lx_n \to Sx$ (5) de manière que $x \in D_{\bar{L}}$ et $\bar{L}x = Sx$; donc $\bar{L} = S$.

(5) La flèche dénote la convergence forte dans X.

2. UNE CONDITION SUFFISANTE.

2.1. *Données.*

On donne comme dans 1.1 un espace de Banach complexe X et deux opérateurs linéaires fermés A et B dans X générateurs infinitésimaux de semi-groupes de classe C_0 tels que (1.1) a lieu; pour simplifier les démonstrations on suppose (ce qui n'est pas restrictif) $\omega_A \leq 0$, $\omega_B \leq 0$.

On fait l'hypothèse suivante:

$$(2.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Si } t \in \overline{\mathbf{R}}_+ \textit{ et } x \in D_A \textit{ alors } e^{tB} x \in D_A \textit{ et si l'on pose}: \\ \qquad\qquad A e^{tB} x - e^{tB} A x = Q(t)\, x \qquad \forall x \in D_A \\ \textit{alors } Q(t) \textit{ est borné dans } X,\ t \to Q(t)\, x \textit{ est mesurable } \forall x \in X \\ \textit{et il existe } K \in \mathbf{R}_+ \textit{ et } \alpha \in [0, 1[\textit{ tels que } \|Q(t)\| \leq K t^{-\alpha} \quad \forall t \in \overline{\mathbf{R}}_+ . \end{array}\right.$$

De (2.1) on déduit:

$$(2.2)\qquad A e^{tB} A^{-1} - e^{tB} = Q(t)\, A^{-1}$$

puisque $t \to A e^{tB} A^{-1}$ est evidemment un semi groupe d'opérateurs dans X alors, en grâce du Lemme VIII–1.3 dans [3], $t \to A e^{tB} A^{-1}$ est fortement continu dans $\mathbf{R}_+$ et (2.1) est equivalent à:

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Si } x \in D_A \textit{ alors } e^{tB} x \in D_A \ \forall t \in \overline{\mathbf{R}}_+ ,\ \textit{l'application}: \overline{\mathbf{R}}_+ \to X, \\ t \to A e^{tB} x \textit{ est continue et il existe } K \in \mathbf{R}_+ \textit{ et } \alpha \in [0, 1[\textit{ tels que} \\ \qquad\qquad \|A e^{tB} x - e^{tB} A x\| \leq K t^{-\alpha} \|x\| . \end{array}\right.$$

2.2. *Le Théorème principal.*

THÉORÈME 2.1. – *Si l'on suppose que* (2.1) *a lieu alors* $D_A \cap D_B$ *est dense dans* X, $A + B$ *est fermable et il existe* $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ *et* $M \in \mathbf{R}_+$ *tels que* $\rho(\overline{A+B}) \supset \lambda_0 + \mathbf{C}_+$ *et*

$$(2.3)\qquad \|R(\lambda, \overline{A+B})\| \leq M/\mathrm{Re}\,\lambda \qquad \forall \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$$

On a finalement:

$$(2.4)\qquad R(\lambda, \overline{A+B}) = T_\lambda (1 - Q_\lambda)^{-1} \qquad \forall \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$$

où

$$(2.5)\qquad \left\{\begin{array}{l} T_\lambda x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tB} e^{tA} x \, dt \\ Q_\lambda x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)\, e^{tA} x \, dt \end{array}\right. \qquad \forall x \in X,\ \lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$$

2.3. *Démonstration du Théorème 2.1.*

(i) $D_A \cap D_B$ *est dense dans* X.

Soit $x' \in X'$ (4) tel que $\langle x, x' \rangle = 0$ $\forall x \in D_A \cap D_B$ et $y \in D_A$ posons $z(t) = 1/t \int_0^t e^{sB} y \, ds$, en vertu de (2.1) $z(t) \in D_A \cap D_B$, alors, en passant à la limite pour $t \to 0$ dans l'égalité $\langle z(t), x' \rangle = 0$ on obtient $\langle y, x' \rangle = 0$ $\forall y \in D_A$ et donc $x' = 0$ car D_A est dense dans X.

(ii) *Il existe* $\omega \in \mathbf{R}$ *tel que* $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ *est dense dans* X $\forall \lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$.

Soit $x \in D_A$, en vertu de (2.1) $e^{tB} e^{tA} x \in D_A$ et $A e^{tB} e^{tA} x = Q(t) e^{tA} x + e^{tB} e^{tA} A x$, il s'en suit $T_\lambda x \in D_A$ et:

$$AT_\lambda x = Q_\lambda x + T_\lambda A x . \tag{2.6}$$

Démontrons maintenant que $T_\lambda x \in D_B$; on a en effet:

$$T_\lambda x = \int_0^\infty d\,(e^{tB} B^{-1})\, e^{t(A-\lambda)} x \quad (6) \tag{2.7}$$

d'où, en intégrant par partie

$$T_\lambda x = - B^{-1} x - B^{-1} T_\lambda A x + \lambda B^{-1} T_\lambda x \tag{2.8}$$

qui entraine $T_\lambda x \in D_B$ et, compte tenu de (2.6)

$$(\lambda - A - B)\, T_\lambda x = x - Q_\lambda x \qquad \forall x \in D_A \tag{2.9}$$

Puisque $\| Q_\lambda \| \leq K \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda t}\, t^{-\alpha}\, dt$ on a $\lim_{\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty} \| Q_\lambda \| = 0$ de manière qu'il existe $\omega \in R$ tel que $\| Q_\lambda \| < 1$ $\forall \lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$; alors si $\lambda \in \omega + \mathbf{C}_+$ il existe borné $(1 - Q_\lambda)^{-1}$ ce qui entraîne evidemment (ii) car $(\lambda - A - B)(X) \supset (1 - Q_\lambda)(D_A)$ et D_A est dense dans X.

(iii) *Il existe* λ_0 *tel que* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$ *on a*

$$\| R(\lambda, A_n + B) \| \leq 2 M_A M_B / \mathrm{Re}\,\lambda .$$

(6) Soient $F : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \mathfrak{L}(X, X)$ et $\varphi : \overline{\mathbf{R}}_+ \to X$ fortement continuement dérivables dans un interval, fini ou infini, $[0, T]$ de $\mathbf{R}$, on a alors:

$$\int_0^T d\,(F(s))\, \varphi(s) = \int_0^T F'(s)\, \varphi(s)\, ds = F(T)\, \varphi(T) - F(0)\, \varphi(0) - \int_0^T F(s)\, \varphi'(s)\, ds .$$

Posons:

$$
(2.10)\qquad \begin{cases} T_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tB} e^{tA_n}\, dt \\ Q_n(t) = A_n e^{tB} - e^{tB} A_n \\ Q_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_n(t)\, e^{tA_n}\, dt \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,,\ \lambda \in \mathbf{C}_+
$$

(2.9) avec A_n à la place de A et $Q_\lambda^{(n)}$ à la place de Q_n donne:

$$
(2.11)\qquad (\lambda - A_n - B)\, T_\lambda^{(n)} = 1 - Q_\lambda^{(n)} \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}_+
$$

En outre si $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_n = n(M_A + 1)M_B$ on a $\| A_n R(\lambda, B)\| < 1$ de manière qu'il existe borné $(1 - A_n R(\lambda, B))^{-1}$ et l'on a:

$$
(2.12)\qquad R(\lambda, A_n + B) = R(\lambda, B)(1 - A_n R(\lambda, B))^{-1} \qquad \forall \lambda \in \lambda_n + \mathbf{C}_+
$$

alors de (2.11) on tire

$$
(2.13)\qquad T_\lambda^{(n)} = R(\lambda, A_n + B)(1 - Q_\lambda^{(n)}) \qquad \forall \lambda \in \lambda_n + \mathbf{C}_+
$$

en outre, de l'identité

$$
(2.14)\qquad Q_n(t) = nR(n, A)\, Q(t)\, nR(n, A)
$$

on déduit $\| Q_\lambda^{(n)} \| \leq M_A^2 \| Q_\lambda \|$ de manière que si $\lambda \in \omega M_A^2 + \mathbf{C}_+$ on a $\| Q_\lambda^{(n)} \| < 1$ et, en vertu de (2.13) on a

$$
(2.15)\qquad R(\lambda, A_n + B) = T_\lambda^{(n)} (1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1} \qquad \forall \lambda \in \lambda_n + \mathbf{C}_+
$$

et cette égalité se prolonge évidemment à $\omega M_A^2 + \mathbf{C}_+$.

De (2.15) on déduit maintenant:

$$
(2.16)\qquad \| R(\lambda, A_n + B) \| \leq 2 M_A M_B / \mathrm{Re}\,\lambda \qquad \forall \lambda \in 2\,\omega M_A^2 + \mathbf{C}_+
$$

et (iii) est démontré avec $\lambda_0 = 2\,\omega M_A^2$.

On a donc montré que A et B verifient (1.2) (avec $N(\lambda) = 2 M_A M_B / \mathrm{Re}\,\lambda$) et la propriétè (ii) du théorème 1.2 ce qui entraîne la prémière affirmation du théorème 2.1; finalement les relations (2.5) sont une conséquence immediate de (2.9).

3. EQUATIONS D'EVOLUTION.

On donne un espace de Banach Y (norme $|\ |$), un interval $[0, T]$ dans $\bar{\mathbf{R}}_+$ et une famille $\{B(s)\}_{s \in [0,T]}$ d'opérateurs linéaires fermés dans Y générateurs infinitésimaux de semi-groupes de classe C_0 telle que:

(3.1)

(i) *L'application* $F : \bar{\mathbf{R}}_+ \times [0, T] \to \mathcal{L}(Y, Y)$ (7), $F(t, s) = e^{tB(s)}$ *est fortement continue et il existe* $M_B \in \mathbf{R}_+$ *tel que* $|e^{tB(s)}| \leq M_B$ $\forall t \in \bar{\mathbf{R}}_+$, $s \in [0, T]$

(ii) F *est continuement fortement dérivable par rapport à s dans* $\mathbf{R}_+ \times [0, T]$ *et il existe* $K \in \mathbf{R}$ *et* $\alpha \in [0, 1[$ *tels que:*

$$\left| \frac{\partial e^{tB(s)}}{\partial s} \right| \leq K t^{-\alpha}.$$

On définit maintenant l'opérateur B dans $L^p(0, T; Y)$ (8) de la manière suivante:

$$(3.2) \quad \begin{cases} D_B = \{u \in L^p(0, T; Y); u(s) \in D_{B(s)} \text{ p.p. } \textit{dans } [0, T] \textit{ et l'application} \\ \qquad s \to B(s)\, u(s) \textit{ appartient à } L^p(0, T; Y)\} \\ (Bu)(s) = B(s)\, u(s) \qquad \text{p.p. } \textit{dans } [0, T] \end{cases}$$

d'après (3.1)–i B est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 tel que $\| e^{tB} \| \leq M_B$ $\forall t \in \bar{\mathbf{R}}_+$.

On définit finalement l'operateur A dans $L^p(0, T; Y)$

$$(3.3) \qquad D_A = \{u \in W^{1,p}(0, T; Y), u(0) = 0\} \qquad Au = -\frac{du}{dt} \qquad \forall u \in D_A.$$

Le théorème suivant est alors évident:

THÉORÈME 3.1. – *Les opérateurs* A *et* B *définis réspectivement par* (3.2) *et* (3.3) *vérifient la propriété* (2.2) *(avec* $X = L^p(0, T; Y)$).

3.2. *Problème de Cauchy.*

On cherche à résoudre le problème de Cauchy:

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - B(t)\, u(t) = f & f \in L^p(0, T; Y) \\ u(0) = 0 & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Nous dirons que $u \in L^p(0, T; Y)$ est solution faible de (3.4) s'il existe une suite $\{u_n\}$ dans $W^{1,p}(0, T; Y) \cap D_B$ telle que

$$(3.5) \qquad u_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \to u, \quad \lambda u_n + \frac{du_n}{dt} - Bu_n \to f \text{ dans } L^p(0, T; Y).$$

(7) $\mathcal{L}(Y, Y)$ est l'algèbre de Banach des opérateurs linéaire bornés dans X.

(8) Pour la définition et les propriétés de $L^p(0, T; Y)$ et $W^{1,p}(0, T; Y)$ voir par exemple [7].

On démontre le théorème:

THÉORÈME 3.2. – *Si l'on suppose que* (3.1) *a lieu alors le problème de Cauchy* (3.4) *admet une solution faible unique.*

Démonstration du théorème 3.2.

En grace du théorème 2.1 il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que si $\lambda \in \lambda_0 + \mathbf{C}_+$ l'équation

$$\lambda\tilde{u} - A\tilde{u} - B\tilde{u} = \tilde{f} \qquad \text{où} \quad \tilde{f}(s) = e^{-\lambda s} f(s) \quad \text{p.p. dans} \quad [0, T] \tag{3.6}$$

admet une solution unique $\tilde{u}$; alors $s \to u(s) = e^{\lambda s}\,\tilde{u}(s)$ est la solution cherchée.

3.4. *Remarque* (*Cas analytique*).

Si l'on suppose:

(3.7)

(i) *Il existe un secteur* $S_\theta = \{\lambda \in \mathbf{C} \,;\, |\arg \lambda| < \theta\}$ $\pi/2 < \theta < \pi$ *tel que* $\rho(B(s)) \supset S_\theta$ $\forall s \in [0, T]$ *et un nombre positif* N_B *tel que* $|R(\lambda, B(s))| \le N_B/|\lambda|$ $\forall \lambda \in S_\theta$

(ii) *L'application* $H : S_\theta \times [0, T] \to \mathcal{L}(Y, Y)$, $H(\lambda, s) = R(\lambda, B(s))$ *est fortement continue, fortement continuement dérivable par rapport à s et il existe* $K' \in \mathbf{R}_+$ *et* $\alpha' \in]0, 1]$ *tels que* $\left|\dfrac{\partial R(\lambda, B(s))}{\partial s}\right| \le K'/|\lambda|^{\alpha'}$ $\forall \lambda \in S_\theta$ $s \in [0, T]$

(iii) D_B *est dense dans* $L^p(0, T; Y)$ (9).

alors il est facile de démontrer, en utilisant la transformation de Laplace que (3.1) a lieu avec $\alpha = 1 - \alpha'$; on retrouve alors un résultat de Kato–Tanabe [6] (cfr. aussi Grisvard [4]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. DA PRATO, *Équations opérationelles dans les espaces de Banach et applications*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 266, 60–62 (1968); *Somma di generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione e equazioni di evoluzione in spazi di Banach*, « Ann. Mat. Pura e Applicata », *78*, 131–158 (1968).

[2] G. DA PRATO, *Equations opérationelles dans les espaces de Banach* (*cas analytique*), « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 266, 277–279 (1968); *Somma di generatori infinitesimali di semigruppi analitici*, « Rend. Sem. Mat. Padova », 151–161 (1968).

[3] N. DUNFORD e J. J. T. SCHWARTZ, *Linear operators* I, Interscience (1958).

[4] P. GRISVARD, *Cours Pécot 1968* (à paraître).

[5] E. HILLE–R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. Colloq. Pubbl. », *31* (1957).

[6] T. KATO–H. TANABE, *On the abstract evolution equations*, « Osaka Math. J. », *14*, 107–133 (1962).

[7] J. L. LIONS–E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod 1968).

[8] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer–Verlag (1965).

(9) Par exemple si $\bigcap_{s \in [0,T]} D_{B(s)}$ est dense dans Y cette condition est vérifiée.