Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edgar Raymond Lorch, Hing Tong

Characterization of certain compact topologies

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.1-2, p. 13–13.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_1-2_13_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi. — *Characterization of certain compact topologies.* Nota (*) di EDGAR RAYMOND LORCH e HING TONG, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUNTO. — È noto che se (E, τ) è uno spazio compatto (compreso separato), e se $f_1, \cdots, f_n$ sono funzioni reali continue che separano i punti di E, l'unica topologia compatta per la quale queste funzioni sono continue è precisamente τ. Nella nota presente si dimostra il teorema reciproco: Sia τ una topologia compatta su E e siano $f_1, \ldots, f_n$ funzioni reali τ–continue. Supponiamo che τ sia l'unica topologia compatta per la quale le funzioni f_i sono continue. In questo caso esiste un numero finito di funzioni reali τ–continue che separano i punti di E.

In this note, E is a set with elements $x, y, \cdots$. We consider a compact (implies separated) topology τ on E. The algebra of bounded real-valued Baire functions over the topological space (E, τ) is denoted by I_τ. Following [1], we consider the totality T of compact topologies τ' on E such that $I_{\tau'} = I_\tau$. The metatopology on T is defined by the following system of neighborhoods of $\tau \in T$: If $f_1, \cdots, f_n$ are τ–continuous functions, then the neighborhood of τ defined by $f_1, \cdots, f_n$ is

$$U(\tau; f_1, \cdots, f_n) = \{\tau' : f_1, \cdots, f_n \text{ are } \tau'\text{–continuous}\}$$

If τ has the property that there exist n τ–continuous functions $f_1, \cdots, f_n$ which separate the points of E, then clearly $U(\tau; f_1, \cdots, f_n) = \{\tau\}$, that is, the metatopology is discrete at the point τ. The purpose of this note is to state the converse of this proposition.

THEOREM.—*Let* $\tau \in T$ *and suppose that the metatopology is discrete at the point* τ. *Then there exists a finite number of* τ*–continuous functions*, $f_1, \cdots, f_n$ *which separate the points of* E, *that is, such that* $f_i(x) = f_i(y)$ *for* $x, y \in E$ *and* $i = 1, \cdots, n$ *imply* $x = y$.

The proof will be given elsewhere. It is based on an analysis of the structure of T that cannot be sketched here. A consequence of this theorem is (for definitions see [1]):

COROLLARY.—*The topology* ${}_\tau G$ *of the group of Baire equivalences is discrete if and only if the metatopology on* T *is discrete at the point* τ.

REFERENCES.

[1] E. R. LORCH, *On compact metric spaces and the group of Baire equivalences*, to appear in *Studia Mathematica*.

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1968.