Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Orazio Sorace

Caratterizzazioni di strutture spaziali non desarguesiane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.6, p. 759–764.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_6_759_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Geometria. — *Caratterizzazioni di strutture spaziali non desarguesiane* (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A study of some properties concerning the double ternary ring associated with a weak projective three space.

G. Ewald ha dato in [1] un metodo per costruire un « n–G e f ü g e », ossia uno spazio grafico tridimensionale avente n punti p r i v i l e g i a t i, e per associare ad esso un doppio sistema ternario (1). Tra altri risultati interessanti, nel suddetto lavoro vengono caratterizzati il caso in cui il doppio sistema ternario sia un sistema ternario semplice e quello in cui in esso valga inoltre la prima condizione di linearità [2] e l'associatività dell'addizione.

Nel presente lavoro, riassunto dapprima (n. 1) il metodo di G. Ewald per costruire una *struttura* $\mathcal{S}$ (cioè un 2–Gefüge), vengono poi caratterizzati geometricamente alcuni casi che può presentare il doppio sistema ternario e tra gli altri, nel n. 2, quello in cui il prodotto di due elementi sia lo stesso nei due sistemi e valga solo in uno di essi la prima condizione di linearità. Infine si analizzano, nel n. 3, il caso di un sistema ternario semplice in cui valga solo la prima condizione di linearità e, nel n. 5, quello in cui valga ivi la seconda condizione di linearità [2] e l'associatività della moltiplicazione.

1. Due insiemi di elementi $\{A, B, \cdots\}$ e $\{\alpha, \beta, \cdots\}$, da chiamarsi rispettivamente *punti* e *piani*, ed una assegnata relazione di incidenza fra essi (2) formano un « n–G e f ü g e » quando, fissato opportunamente un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di punti *fondamentali*, di potenza n, sono soddisfatti i seguenti assiomi:

1) Su ogni piano giace almeno un punto fondamentale.

2) Per un punto fondamentale e due punti distinti da esso passa sempre almeno un piano.

3) Tre piani hanno sempre almeno un punto in comune.

4) Se tre piani distinti hanno in comune due punti distinti, allora essi possiedono a due a due la stessa intersezione.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Metodi per costruire strutture spaziali di incidenza d e b o l i, atte a contenere piani non desarguesiani furono esposti contemporaneamente da E. Sperner e da G. Ewald nel congresso di Utrecht del 1959 dedicato ai « Fondamenti algebrici e topologici della Geometria ».

(2) Esprimeremo anche tale relazione mediante l'usuale terminologia « giacere su », « passare », « essere complanari » ecc. ecc. Inoltre, identificheremo i piani con gli insiemi di punti che ad essi appartengono.

5) Per ogni punto passano tre piani che hanno in comune solo questo punto. Esistono due punti fondamentali e tre ulteriori punti tali che quattro di questi cinque punti non sono mai complanari [3].

Nel seguito considereremo sempre una *struttura* $\mathfrak{S}$ $(n = 2)$ e chiameremo A_1 ed A_2 i due punti fondamentali.

Chiamansi *rette* le intersezioni di piani distinti.

Chiamasi A_i–piano o A_i–retta $(i = 1, 2)$ un piano o una retta che contenga uno solo dei due punti fondamentali, il punto A_i, e chiamasi $A_1 A_2$–piano un piano che contenga tutti e due i punti fondamentali.

Ricorderemo ora alcune tra le più importanti proprietà di una struttura $\mathfrak{S}$.

a) Per due punti distinti passa una ed una sola retta, tranne che giacciano insieme in un $A_1 A_2$–piano senza che uno di essi sia fondamentale.

b) Tre punti non allineati (di cui almeno uno sia fondamentale) appartengono ad un solo piano.

c) Un piano ed una retta non appartenente ad esso hanno in comune uno ed un sol punto.

d) Due rette, nessuna delle quali sia la $A_1 A_2$, contengono lo stesso numero cardinale (≥ 3) di punti.

e) Un A_i–piano è un piano grafico [4] e due A_i–piani (per lo stesso i) sono isomorfi.

f) Vale il teorema di Desargues relativo a due triangoli prospettivi e non complanari quando uno dei due punti fondamentali è il centro e l'altro giace sull'asse.

In un $A_1 A_2$–piano esistono solo rette che passano per A_1 o per A_2. Esso non è in generale un piano grafico. Indicheremo la maniera di *integrare* la struttura $\mathfrak{S}$ con nuove rette. A tale scopo si fissi un A_2–piano ε e su di esso due punti O e D, non allineati con A_2. Si fissi ancora un punto U non appartenente ad alcuno dei quattro piani che A_1, A_2, O, D determinano a tre a tre. Si chiami ω il piano $A_1 A_2 U$. Tre punti di un $A_1 A_2$–piano distinto da ω si chiamino a l l i n e a t i quando le rette che li congiungono con U incontrano ε in punti allineati. Il piano ω si integra proiettando su di esso ε da $E = OU \cap DA_1 A_2$.

Dato un punto $A \in A_2 U$, $A \neq A_2$ ed una retta s del piano $OA_1 A_2$, la quale non passi né per A_1 né per A_2, chiamasi *quasipiano* l'insieme di tutti i punti delle rette r che contengono A e che incontrano la retta s. La struttura $\mathfrak{S}$ così integrata sarà indicata con $\overline{\mathfrak{S}}$. Una retta in $\overline{\mathfrak{S}}$ di un $A_1 A_2$–piano che non sia una retta in $\mathfrak{S}$ sarà chiamata $A_1 A_2$–retta.

Chiamasi *doppio sistema ternario* un insieme K i cui elementi rispetto a ciascuna di due operazioni ternarie T_1 e T_2 formano un sistema ternario

(3) Un « n–Gefüge » diventa uno spazio grafico tridimensionale quale è stato caratterizzato da Winternitz [3], se in questi assiomi si sopprime la parola « fondamentale ».

(di M. Hall [5]), coincidendo per le due operazioni gli elementi 0 e 1. Nel caso $T_1 = T_2$ si ha un sistema ternario usuale. Indicheremo la maniera di associare ad una struttura $\mathcal{E}$ un doppio sistema ternario.

Si ponga $E_1 = A_2 D \cap OUA_1$, $E_2 = A_1 D \cap OUA_2$. Gli elementi di K sono i simboli associati ai punti di OU. Nei piani OA_1U e OA_2U si introducano i sistemi ternari T_1 e T_2 relativi rispettivamente a O, U, A_1, E_1 e O, U, A_2, E_2. Se $P \notin \omega$, le sue coordinate (x, y, z) sono gli elementi di K associati rispettivamente ai punti $X = OU \cap PA_1A_2$, $Y = OA_1 \cap PUA_2$, $Z = OA_2 \cap PUA_1$. Se invece $P \in \omega$, $P \neq A_1, A_2$, le sue coordinate (m, n) sono gli elementi di K associati rispettivamente ai punti $M = UA_1 \cap PA_2$, $N = UA_2 \cap PA_1$. Da questa coordinatizzazione restano esclusi i punti A_1 ed A_2.

Se la retta in cui un A_2–piano interseca OUA_1 ha equazione $y = T_1(x, m, b)$, questa è l'equazione dell'A_2–piano considerato. Analogamente l'equazione di un A_1–piano è del tipo $z = T_2(x, m, b)$. Se un A_1A_2–piano, diverso da ω, interseca OU in un punto X, cui è associato il numero c, esso ha equazione $x = c$. Così ogni piano tranne di ω ha la sua equazione.

Vediamo ora come si rappresentano le rette. Se una retta non contiene né A_1 né A_2 è rappresentata da una coppia di equazioni del tipo $y = T_1(x, m, b)$; $z = T_2(x, m', b')$. Una A_1–retta (o una A_2–retta) non appartenente ad ω è rappresentata da una coppia di equazioni del tipo $x = c$; $z = b$ (o $x = c$; $y = b$). Una A_1–retta (o una A_2–retta) appartenente ad ω e distinta da A_1A_2 è rappresentata da una coppia di equazioni $z = T_2(x, m, b)$; $z = T_2(x, m, b')$ (o $y = T_1(x, m, b)$; $y = T_1(x, m, b')$), per tutti i valori di b e di b', essendo m fissato.

Viceversa, dato un doppio sistema ternario (K, T_1, T_2), si può dedurre da esso una struttura $\mathcal{E}$ i cui punti sono: 1) Elementi di $K \times K \times K$. 2) Elementi di $K \times K$. 3) A_1, A_2, essendo A_1 e A_2 simboli ausiliari ($A_1, A_2 \notin K$).

I piani sono: 1) Fissati $m, b \in K$, l'insieme di tutti i punti (x, y, z) tali che sia $y = T_1(x, m, b)$; l'insieme di tutti i punti (m, c), per qualsiasi c, ed il punto A_2. Tale piano è un A_2–piano. 2) Fissati $m, b \in K$, l'insieme di tutti i punti (x, y, z) tali che sia $z = T_2(x, m, b)$; l'insieme di tutti i punti (c, m), per qualsiasi c, ed il punto A_1. Tale piano è un A_1–piano. 3) Fissato $a \in K$, l'insieme di tutti i punti (a, b, c), qualunque siano b, c, i punti A_1 ed A_2. Tale piano è un A_1A_2–piano. 4) L'insieme di tutti i punti (m, n), qualunque siano m ed n ed i punti A_1 e A_2. Tale piano è quello indicato con ω. È facile verificare che i punti ed i piani così definiti formano una struttura $\mathcal{E}$.

Al fine di assegnare equazioni anche ai quasipiani, posto $E' = UD \cap \cap OA_1A_2$, si introduca nel piano integrato OA_1A_2 il sistema ternario relativo a O, A_2, A_1, E', che è uguale a T_2 come si vede proiettando il piano OUA_2 da A_1 su ε e indi ε da U sul piano OA_1A_2. Una retta s del piano OA_1A_2, non passante per A_2, ha equazioni $x = 0$, $z = T_2(y, b, c)$. Se A ha coordinate (o, a), il quasipiano sopra considerato ha equazione $z = T_2(x, a, T_2(y, b, c))$; viceversa ogni equazione di questo tipo rappresenta un quasipiano.

2. *Una struttura* $\mathcal{E}$ *si può descrivere con l'aiuto di un doppio sistema ternario tale che il prodotto di due elementi sia lo stesso nei due sistemi e che in uno di essi valga la prima condizione di linearità, se e solo se esiste una* A_i*–retta tale che i piani che la contengono secano rette sui quasipiani di una* $\overline{\mathcal{E}}$ *contenenti una stessa* $A_1 A_2$*–retta, sghemba con la* A_i*–retta.*

Sia $i = 2$ e si scelga O sulla A_2–retta. Un piano che la contiene ha equazione $y = T_1(x, m, o)$. Si scelgano D ed U sulla $A_1 A_2$–retta. Un quasipiano che la contiene ha equazione $z = T_2(y, 1, c)$. Se i piani contenenti l'A_2–retta secano rette su questi quasipiani, esisteranno m' e c' tali che sia

$$T_2(T_1(x, m, 0), 1, c) = T_2(x, m', c') \tag{1}$$

per tutti gli x. Per $x = 0$, intanto si ha $c = c'$. Poiché m' non dipende da c, per $c = 0$ la (1) ci dà

$$T_1(x, m, 0) = T_2(x, m', 0), \tag{2}$$

e per $x = 1$, si ha $m = m'$. Così la (2) esprime che il prodotto di due elementi è lo stesso nei due sistemi e la (1) che nel sistema T_2 vale la prima condizione di linearità.

Viceversa, se il prodotto di due elementi è lo stesso nei due sistemi e se nel sistema T_2 vale la prima condizione di linearità, se sechiamo un qualunque A_2–piano contenente O di equazione $y = T_1(x, m, 0)$, ossia $y = T_2(x, m, 0)$, con un qualunque quasipiano $z = T_2(y, 1, c)$ si ottiene

$$z = T_2(T_2(x, m, 0), 1, c) = T_2(x, m, c),$$

sicché l'intersezione è una retta.

3. *Una struttura* $\mathcal{E}$ *si può descrivere con l'aiuto di un sistema ternario in cui valga la prima condizione di linearità, se e solo se esiste una* A_i*–retta tale che i piani che la contengono secano rette sui quasipiani di una* $\overline{\mathcal{E}}$ *contenenti una stessa* $A_1 A_2$*–retta, sghemba con la* A_i*–retta, e se uno di questi quasipiani è un piano grafico.*

Infatti [1, p. 410] l'esistenza del quasipiano che sia un piano grafico è condizione necessaria e sufficiente affinché la struttura $\mathcal{E}$ possa descriversi con l'aiuto di un sistema ternario ($T_1 = T_2$) e l'esistenza della A_i–retta tale che i piani che la contengono secano rette sui quasipiani di una $\overline{\mathcal{E}}$ contenenti una stessa $A_1 A_2$–retta è, per il teorema del n. 2, condizione necessaria e, se $T_1 = T_2$, sufficiente perché in tale sistema valga la prima condizione di linearità.

Una struttura $\mathcal{E}$ *si può descrivere con l'aiuto di un doppio sistema ternario tale che il prodotto di due elementi sia lo stesso nei due sistemi, se e solo se esiste una* A_i*–retta tale che i piani che la contengono secano rette su di un quasipiano di una* $\overline{\mathcal{E}}$.

La dimostrazione può dedursi da quella del teorema del n. 2 particolarizzando $c = 0$.

4. *Una struttura* $\mathcal{S}$ *si può descrivere con l'aiuto di un doppio sistema ternario tale che il prodotto di due elementi sia lo stesso nei due sistemi, che in uno di essi, ad esempio* T_2, *valga la prima condizione di linearità e che risulti*

$$T_1(x, m, c') + c = xm \qquad \text{se} \quad c' + c = 0, \tag{3}$$

(con il simbolo $+$ si è indicata l'addizione in T_2), *se e solo se esistono una* A_1*–retta ed una* A_2*–retta complanari, tali che i piani che contengono una di esse secano rette sui quasipiani di una* $\overline{\mathcal{S}}$ *contenenti una stessa* $A_1 A_2$*–retta, sghemba con le* A_i*–rette.*

Infatti se esistono una A_1–retta ed una A_2–retta come nell'enunciato di cui sopra, scegliendo O nel loro punto comune ed i punti D ed U sull'$A_1 A_2$–retta, si deduce anzitutto, come nel teorema del n. 2, che il prodotto di due elementi è lo stesso nei due sistemi e che in T_2 vale la prima condizione di linearità. Poiché poi i piani $z = xm$ secano sui quasipiani $z = y + c$ rette, esisteranno m' e c' tali che sia

$$T_1(x, m', c') + c = xm.$$

Per $x = 0$ si ha $c' + c = 0$. Come nel teorema del n. 2, si dimostra che $m' = m$ e quindi vale la (3).

Viceversa se il prodotto è lo stesso nei due sistemi, se in T_2 vale la prima condizione di linearità e se vale la (3), non solo, per il teorema del n. 2, i piani che contengono la retta A_2 O, ma anche i piani $z = xm$ (che contengono la retta A_1 O) secano sui quasipiani $z = y + c$ rette, perché dalla $xm = y + c$ e dalla (3) si deduce $y = T_1(x, m, c')$.

Osserviamo che dalla (3) si deduce che in T_1 vale la prima condizione di linearità. Infatti se in essa poniamo al posto di x ed m rispettivamente xm ed 1, si ha

$$T_1(xm, 1, c') + c = xm \qquad \text{se} \quad c' + c = 0,$$

che confrontata con la (3) ci dà

$$T_1(x, m, c') = T_1(xm, 1, c').$$

5. *Una struttura* $\mathcal{S}$ *si può descrivere con l'aiuto di un sistema ternario in cui valga la seconda condizione di linearità e l'associatività della moltiplicazione, se e solo se esiste una retta, sghemba con* $A_1 A_2$, *tale che, in una* $\overline{\mathcal{S}}$, *i quasipiani che la contengono siano piani grafici.*

Se esiste una tale retta, si scelgano O ed U su di essa. Intanto [1, p. 410], poiché il piano $z = y$ è un piano grafico, $\mathcal{S}$ si può descrivere con l'aiuto di un sistema ternario T. I quasipiani che contengono la retta OU hanno equazioni del tipo $z = yb$. La loro intersezione con un A_2–piano $y = T(x, a, c)$ deve essere sempre una retta, cioè esistono a' e c' tali che sia

$$z = T(x, a, c) \cdot b = T(x, a', c'). \tag{4}$$

Intanto, per $x = 0$, risulta $c' = cb$. Inoltre a' non dipende da c, poiché, detto A il punto della retta A_1 U corrispondente ad a e detta UB la retta comune al piano $z = yb$ ed al piano $A_1 A_2 U$, a' corrisponde al punto $A_2 U \cap \cap A_1 (BU \cap A_2 A)$. Pertanto, poiché per $c = 0$ dalla (4) si ha $(xa)\, b = xa'$, da questa, per $x = 1$, si ottiene $a' = ab$ e quindi vale la

$$T(x, a, c) \cdot b = T(x, ab, cb).$$

Da questa, per $a = 1$, si ha

$$(x + c)\, b = T(x, b, cb), \tag{5}$$

cioè la seconda condizione di linearità e, per $c = 0$,

$$(xa)\, b = x\,(ab), \tag{6}$$

cioè l'associatività della moltiplicazione.

Se, viceversa, $\mathcal{E}$ si può descrivere con l'aiuto di un sistema ternario in cui valgono le (5) e (6), se si intersecano i quasipiani $z = yb$ con un qualunque A_2–piano $y = T(x, a, c)$, si ottiene

$$z = T(x, a, c) \cdot b.$$

Posto $u = c/a$ (cioè $ua = c$), si ha

$$z = T(x, a, ua) \cdot b = (x + u)\,(ab) = T(x, ab, u\,(ab)) = T(a, ab, cb)$$

cioè le intersezioni sono rette ed i quasipiani considerati sono piani grafici.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. EWALD, *Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nichtdesarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern*, «Math. Zeitschr.», 395–418 (1961).

[2] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin, 89–99 (1955).

[3] A. WINTERNITZ, *Zur Berdründung der projektiven Geometrie*, «Ann. of Math.», *41*, 365–390 (1940).

[4] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry with an appendix by L. Lombardo-Radice*, Ed. Cremonese, Roma, 365–382 (1961).

[5] M. HALL, *The theory of groups*, The MacMillan Com., New York, 353–364 (1964).