Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tudor Zamfirescu

Sur les familles continues de courbes. Nota IV

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.6, p. 753–758.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_6_753_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota IV di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa Nota IV l'autore completa le dimostrazioni dei teoremi annunciati nella precedente Nota III fornendo la giustificazione del primo di quei teoremi.

Le but de cette note est uniquement celui de donner la démonstration d'un résultat annoncé dans la précédente Note III. Il s'agit du théorème 1 de la note mentionnée, qui précise l'aspect des courbes fermées fortement $\mathfrak{L}$–convexes associées à une famille continue.

Soit C une courbe de Jordan fermée, D le domaine borné ayant C comme frontière,

$$\mathfrak{L} = \{\mathrm{L}(p) : p \in \mathrm{C}\} \qquad (\mathrm{L} : \mathrm{C} \to \bar{\mathrm{D}}^{[0,1]} \text{ continue})$$

une famille continue de courbes dans $\bar{\mathrm{D}}$ (on trouve une définition dans [2]) et

$$\Gamma = \{q(p) : p \in \mathrm{C}\} \qquad (q : \mathrm{C} \to \mathrm{D} \text{ continue})$$

une courbe fermée associée à $\mathfrak{L}$.

On imposera dans la suite la suivante condition sur la courbe Γ, mentionnée déjà dans [2]:

(α) *L'ensemble*

$$\{p \in \mathrm{C} : \operatorname{card} q^{-1}(q(p)) \geq 2\}$$

est rare dans C, *l'ensemble* $\mathrm{L}(p) - \Gamma$ *est dense sur toute courbe* $\mathrm{L}(p) \in \mathfrak{L}$ *et il n'y a aucun arc* $\mathrm{V} \subset \mathrm{C}$ *tel que* $\mathrm{L}(p)$ *soit une courbe d'appui de* $q(\mathrm{V})$ *pour tout* $p \in \mathrm{V}$ (1).

Nous employons la terminologie de [2].

THÉORÈME. – *Supposons que la courbe fermée* Γ *associée à* $\mathfrak{L}$ *satisfait à la condition* (α); *alors, si* Γ *est fortement* $\mathfrak{L}$*–convexe, elle est simple.*

Démonstration. – Raisonant par l'absurde, supposons que Γ n'est pas simple. Alors il existe deux points $p_1, p_2 \in \mathrm{C}$ tels que $q(p_1) = q(p_2)$. Soit A le sous–arc de C ayant les extrémités p_1 et p_2, tel que $-p_1 \notin \mathrm{A}$, si $-p_1 \neq p_2$, et l'un des deux sous–arcs déterminés par p_1 et p_2 sur C, si $-p_1 = p_2$. Alors Γ est la réunion des courbes fermées

$$\Gamma_1 = q(\mathrm{A}) \quad ; \quad \Gamma_2 = q((\mathrm{C} - \mathrm{A}) \cup \{p_1\}).$$

Soit U_i la réunion des composantes bornées du complémentaire de Γ_i.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Rappelons que: 1° si le sous–ensemble E de D se trouve dans le complémentaire d'une des composantes de $\mathrm{D} - \mathrm{L}(p)$, où $\mathrm{L}(p) \in \mathfrak{L}$, alors on dit que $\mathrm{L}(p)$ est une courbe d'appui de E; 2° $q(\mathrm{V}) = \{q(p) : p \in \mathrm{V}\}$.

LEMME 1. – *Si* $x \in \Gamma_i$, *alors tout voisinage de* x *rencontre* U_i.

Soit V un voisinage arbitraire de x dans D. On distingue entre deux cas:

1° $x \neq q(p_1)$.

Choisissons $p^+ \in q^{-1}(x)$ et un voisinage A^+ de p^+ sur C tel que $q(A^+) \subset V$ et que $A^+ \subset B$, où $B = A$ si $i = 1$ et $B = \overline{C - A}$ si $i = 2$. En vertu de la condition (α), il y a un arc non dégénéré $B^+ \subset A^+$ tel que la restriction $q|B^+$ soit homéomorphe et que $q(B^+) \cap q(B - B^+)$ soit vide. Si $p^- \in \operatorname{int} B^+$ (l'intérieur conçu sur C), alors

$$q(p^-) \notin q(\overline{B - B^+});$$

puisque l'ensemble $q(\overline{B - B^+})$ est fermé, il existe un disque fermé δ centré en $q(p^-)$, tel que

$$\delta \subset V \quad ; \quad \delta \cap q(\overline{B - B^+}) = \varnothing .$$

Alors l'arc de Jordan ouvert $q(B^+)$ traverse δ: soient $r^+, r^- \in B^+$ tels que p^- soit situé entre eux et que

$$q(r^+) \in \operatorname{fr} \delta \quad ; \quad q(r^-) \in \operatorname{fr} \delta .$$

Ils déterminent deux arcs γ^+ et γ^- sur fr δ. Puisque $q|B^+$ est homéomorphe, il y a deux autres points $s^+ \in \gamma^+$ et $s^- \in \gamma^-$ tels que $s^+, s^- \notin q(B^+)$. Alors $s^+, s^- \notin \Gamma_i$, parce que

$$\delta \cap q(B - B^+) = \varnothing .$$

Soient σ^+ et σ^- les arcs maximals sur fr δ tels que

$$s^+ \in \sigma^+ \quad , \quad s^- \in \sigma^- , \quad \operatorname{int} \sigma^+ \cap \Gamma_i = \varnothing \quad , \quad \operatorname{int} \sigma^- \cap \Gamma_i = \varnothing .$$

Evidemment, $\sigma^+(\sigma^-)$ forme, avec une partie de $q(B^+)$, une courbe de Jordan fermée $\Sigma^+(\Sigma^-)$. Tout sous-arc A^- de $q(B^+)$ tel que $q(p^-) \in A^-$ et $A^- \cap \operatorname{fr} \delta = \varnothing$ est entièrement contenu dans $\Sigma^+ \cap \Sigma^-$. Donc

$$\Sigma = \overline{(\Sigma^+ \cup \Sigma^-) - (\Sigma^+ \cap \Sigma^-)}$$

est une autre courbe de Jordan fermée, déterminant un ensemble ouvert borné Δ.

Soit C^+ un arc de Jordan aux extrémités s^+ et s^-, tel que

$$C^+ \subset \Delta \cup \{s^+, s^-\}.$$

Supposons maintenant que s^+ et s^- font partie de la même composante connexe du complémentaire de Γ_i. Alors il y a un arc de Jordan C^- aux mêmes extrémités que C^+, mais ne rencontrant pas Γ_i.

Soit Γ^- un sous-arc minimal de C^- rencontrant σ^+ et σ^- (d'extrémités $t^+ \in \sigma^+$ et $t^- \in \sigma^-$). Evidemment int $\Gamma^- \cap \overline{\Delta} = \varnothing$, d'où

$$\Gamma^+ = \Gamma^- \cup C^+ \cup \alpha ,$$

α étant la réunion des sous-arcs (dégénérés ou non) de σ^+ et σ^- dont les extrémités sont t^+, s^+ et t^-, s^-, est une courbe de Jordan fermée. Soit Δ^+ le domaine borné dont la frontière est Γ^+ et τ^+, τ^- les deux arcs (dégénérés ou non) de $\Sigma - \operatorname{int}(\sigma^+ \cup \sigma^-)$. On a soit

$$\tau^+ \subset \Delta^+ \quad ; \quad \tau^- \cap \overline{\Delta^+} = \varnothing,$$

soit

$$\tau^- \subset \Delta^+ \quad ; \quad \tau^+ \cap \overline{\Delta^+} = \varnothing,$$

donc en tout cas les extrémités de σ^+ appartiennent à des composantes connexes de $D - \Gamma^+$ diverses. Ces extrémités déterminent sur $q(B^+)$ un arc β^+, qui n'est pas dégénéré parce que $\beta^+ \supset A^-$. Alors, l'arc

$$\beta^- = q(B) - \beta^+$$

a les suivantes propriétés: il ne rencontre pas $\Delta \cup \operatorname{int}(\sigma^+ \cup \sigma^-)$, donc

$$\beta^- \cap (C^+ \cup \alpha) = \varnothing,$$

mais ses extrémités se trouvent dans des composantes de $D - \Gamma^+$ différentes. Donc $\beta^- \cap \Gamma^+ \neq \varnothing$, à savoir

$$\beta^- \cap \Gamma^- \neq \varnothing.$$

Mais $\beta^- \subset \Gamma_i$ et $\Gamma^- \subset C^-$, d'où

$$\Gamma_i \cap C^- \neq \varnothing,$$

ce qui contredit le choix de C^-. Donc s^+ et s^- se trouvent dans des composantes connexes du complémentaire de Γ_i différentes et comme il n'y a qu'une seule composante non bornée, il s'ensuit que soit s^+, soit s^-, se trouve dans une composante connexe bornée du complémentaire de Γ_i, donc

$$V \cap U_i \neq \varnothing.$$

2° $x = q(p_1)$.

Soit A_+ un arc non dégénéré sur C tel que

$$p_1 \in \operatorname{int} A_+ \quad ; \quad q(A_+) \subset V.$$

Choisissons maintenant $p^+ \in \operatorname{int}(A_+ \cap B)$. Pour ce point p^+ le voisinage

$$A^+ = \operatorname{int}(A_+ \cap B)$$

possède les qualités réquises au numéro 1°, et la démonstration peut être poursuivi comme là-bas.

Le lemme 1 est complètement prouvé.

Il s'ensuit évidemment que $U_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$. Aussi

$$\Gamma_i = \operatorname{fr} U_i.$$

En effet, $\mathrm{fr}\, U_i \subset \Gamma_i$ et supposons qu'il y a un point $y \in \Gamma_i$ qui n'appartient pas à la frontière de U_i; alors $y \notin \overline{U}_i$, d'où il y a un voisinage entier de y qui ne rencontre pas U_i, ce qui contredit le lemme 1.

LEMME 2. – *Il existe un point* $p_0 \in \mathrm{int}\, A$ *tel que*

$$L(p_0) \cap U_1 \neq \varnothing .$$

Si

$$L(p_i) \cap U_1 \neq \varnothing$$

pour $i = 1$ ou 2, l'assertion est évidemment prouvée, parce qu'il y a alors un voisinage V_i de p_i sur C tel que

$$L(p) \cap U_1 = \varnothing$$

pour tout $p \in V_i$ et l'on choisit

$$p_0 \in V_i \cap \mathrm{int}\, A.$$

Si

$$L(p_i) \cap U_1 = \varnothing \qquad (i = 1 , 2),$$

alors on distingue entre deux cas:

1° L'intersection de U_1 avec la réunion des composantes bornées du complémentaire de $C \cup L(p_1) \cup L(p_2)$, dont les frontières contiennent A et, respectivement, $-A$ est non vide (2).

Dans ce cas la démonstration résulte du lemme 1 de [1].

2° On n'est pas dans la situation 1° (ce qui est possible seulement si $-p_1 \neq p_2$).

En effet, l'intersection Δ de U_1 avec l'une des deux composantes bornées du complémentaire de $C \cup L(p_1) \cup L(p_2)$ non considérées à 1° est non vide Il est claire que

$$\mathrm{fr}\, \Delta \not\subset L(p_1) \cup L(p_2) .$$

Soit alors

$$x \in \mathrm{fr}\, \Delta - (L(p_1) \cup L(p_2)) .$$

Puisque $\Gamma_1 \subset D$, on a

$$C \cap \mathrm{fr}\, U_1 = \varnothing;$$

mais

$$\mathrm{fr}\, \Delta \subset C \cup L(p_1) \cup L(p_2) \cup \mathrm{fr}\, U_1 ,$$

donc $x \in \mathrm{fr}\, U_1$. Soit X un voisinage ouvert et connexe de x ne rencontrant pas $L(p_1) \cup L(p_2)$. Si

$$p'_0 \in A \cap q^{-1}(x) ,$$

(2) On utilise ici la notation $-A = \{ p \in C : -p \in A \}$.

alors l'ensemble ouvert $U_1 \cap X$ n'est pas inclus dans $L(p_0')$, et, par conséquent, on est dans la situation 1° soit à l'égard des courbes $L(p_1)$, $L(p_0')$ soit des courbes $L(p_0')$, $L(p_2)$. L'existence de p_0 dans l'intérieur d'un des sous-arcs $p_1 p_0'$ et $p_0' p_2$ de A est assurée et le lemme 2 est complètement prouvé.

Soit maintenant $V_0 \subset A - \{p_1, p_2\}$ un voisinage ouvert du point p_0 trouvé au lemme 2, sur C, tel que

$$L(p) \cap U_1 \neq \varnothing$$

quel que soit $p \in V_0$. En vertu de la condition (α), il y a un point $p_3 \in V_0$ tel que $q(-p_3) \notin \Gamma_1$. Supposons que $q(-p_3) \in U_1$; alors il existe un sous-arc $yz \subset L(p_3)$ tel que $q(-p_3) \in \operatorname{int} yz$ et $yz \subset U_1$. De la condition (α) on déduit aussi qu'il y a deux points $v \in yq(-p_3)$ et $w \in q(-p_3)z$ tels que $v, w \notin \Gamma_2$; donc $v, w \in U$, mais $q(-p_3) \in \Gamma$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle Γ est fortement $\mathfrak{L}$-convexe. Il s'ensuit que le point $q(-p_3)$ est extérieur à U_1. En fait, il y a un entier voisinage $V_3 \subset V_0$ de p_3 tel que

$$q(-V_3) \cap \overline{U}_1 = \varnothing .$$

Soient D_1 et D_2 les composantes bornées du complémentaire de $C \cup L(p_3)$. Puisque $p_3 \in V_0$,

$$U_1 \cap L(p_3) \neq \varnothing ,$$

mais les points de $U_1 \cap L(p_3)$ sont situés seulement sur l'un des arcs $p_3 q(-p_3)$ et $-p_3 q(-p_3)$ à cause de l'$\mathfrak{L}$-convexité forte de Γ. Supposons, par exemple, que

$$U_1 \cap L(p_3) \subset p_3 q(-p_3) .$$

LEMME 3. – *Il y a un voisinage* V_4 *de* p_3 *inclus dans* V_3, *tel que* $L(p_3)$ *soit une courbe d'appui de* $q(-V_4)$.

Supposons que l'assertion du lemme serait inexacte; puisque tout point de Γ_2 appartient à la frontière de U_2, il résulte que

$$U_2 \cap D_1 \neq \varnothing \quad ; \quad U_2 \cap D_2 \neq \varnothing$$

et que $q(-p_3)$ appartient à la frontière de ces deux ensembles. On peut avoir deux cas:

1° $$\bigcap_{p \in V_3} L(p) = \{q(-p_3)\} .$$

Dans ce cas on peut choisir deux points $p', p'' \in V_3$ tels que $p' \neq p''$, $p' \in p_3 p''$ et que $q(-p'), q(-p'') \in D_1$. En tenant compte que

$$q(-p') \in \operatorname{fr}(U_2 - \overline{U}_1) \quad ; \quad q(-p') \in \operatorname{int} \bigcup_{p \in p_3 p''} L(p),$$

il résulte que

$$\bigcup_{p \in p_3 p''} L(p) \cap U_2 - (U_1 \cup \Gamma_1) \neq \varnothing ,$$

ce qui contredit l'$\mathfrak{L}$-convexité forte de Γ.

2° Il y a une courbe $L(p^*)$ avec $p^* \in V_3$, telle que

$$q(-p_3) \notin L(p^*).$$

Evidemment, le point p^* appartient soit à la frontière de D_1, soit à celle de D_2 et l'intersection de $L(p^*)$ avec $L(p_3)$ se trouve soit entre p_3 et $q(-p_3)$, soit entre $q(-p_3)$ et $-p_3$. Comme les quatre situations possibles sont tout à fait analogues, considérons seulement une d'entre elles; disons, par exemple, que

$$p^* \in \operatorname{fr} D_1 \quad ; \quad L(p^*) \cap L(p_3) \subset p_3 q(-p_3).$$

Puisque $q(-p_3) \in \operatorname{fr} U_2 \cap D_2 - \overline{U}_1$, la composante bornée du complémentaire de $L(p_3) \cup L(p^*) \cup (-A)$ rencontre $U_2 \cap D_2 - \overline{U}_1$. En vertu du lemme 1 de [1], on a alors

$$\bigcup_{p \in p^* p_3} L(p) \cap U_2 - (U_1 \cup \Gamma_1) \neq \varnothing,$$

contredisant également l'$\mathfrak{L}$–convexité forte de Γ. Le lemme 3 est démontré.

En vertu de la condition (α), dans le voisinage V_4 procuré par le lemme 3 il existe un point p_4 tel que $L(p_4)$ ne soit pas une courbe d'appui de $q(-V_4)$. Cela contredit le résultat analogue au même lemme 3, qu'on obtient en considérant le point p_4 au lieu de p_3.

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

Nous trouvons enfin utile de signaler que le lemme 1 peut être d'un intêret indépendent du théorème démontré ici, dans un cadre élargi qui se déduit aisément.

Aussi, nous voulons ajouter que la condition (α) est assez forte et qu'une démonstration du même théorème dans une hypothèse (α) plus faible constituerait un bon progrès.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537 (1966).

[2] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes* (Nota III), « Rend. Lincei », *44*, 639–642 (1968).