Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Iulius Gy. Maurer, Miklós Szilagyi

## Étude de certaines équations définies dans des algèbres universelles

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **44** (1968), n.6, p. 733–740.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_6_733_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

**Algebra.** — *Étude de certaines équations définies dans des algèbres universelles.* Nota di IULIUS GY. MAURER e MIKLÓS SZILÁGYI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si studiano certe equazioni nelle algebre universali ottenendo fra l'altro delle estensioni del teorema dell'alternativa di Fredholm.

Le but principal de ce travail est l'étude des quelques équations définies dans des algèbres universelles et dans quelques classes d'algèbres universelles pour obtenir, dans ces cadres générales, des théorèmes qui généralisent le théorème d'altérnative de Fredholm, bien connu dans l'analyse fonctionnelle (voir par exemple [33]). Des résultats classiques concernant les espaces linéaires seront obtenus comme cas particuliers.

Les propriétés des algèbres universelles seront utilisées conformément à la términologie de A. G. Kuroš [2]. Nous résumons d'abord les notions les plus importantes dans ce domaine.

Une *algèbre universelle* $(G, \Omega)$ est un ensemble G muni d'un ensemble $\Omega$ d'opérations $n$–aires, où $n$ a des valeurs entières non négatives. Si $\omega \in \Omega$, alors l'élément de $(G, \Omega)$ qui correspond dans l'operation $\omega$ à un système ordonné $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ d'éléments $a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$ sera noté avec $a_1 a_2 \cdots a_n \omega$. $(G, \Omega)$ et $(G', \Omega')$ sont deux algèbres universelles du *même type* s'il éxiste une application biunivoque $\chi$ de $\Omega$ sur $\Omega'$, de façon que, si $\omega$ est une opération $n$–aire avec $n = n_0$, alors $\omega\chi$ (1) est une opération $n$–aire avec le même $n = n_0$. Il s'ensuit que deux algèbres universelles du même type peuvent être regardées comme des algèbres universelles avec le même système d'opérations. Un sous–ensemble A de l'algèbre universelle $(G, \Omega)$ est dénommé *sous–algèbre* de $(G, \Omega)$ si nous avons $a_1 a_2 \cdots a_n \omega \in A$ pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tous $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$. L'application univoque $\varphi : (G,\Omega) \to (G',\Omega)$ est une *application homomorphe* de $(G, \Omega)$ en $(G', \Omega)$ si, pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tous $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (G, \Omega)$, nous avons: $(a_1 a_2 \cdots a_n \omega)\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi)\cdots(a_n\varphi)\omega$. Une algèbre universelle $(G, \Omega)$ sera dénommée *$\Omega$–groupe* si G est un groupe $(G, +)$ par rapport avec l'un des opérations de $\Omega$ (qui sera noté avec $+$) et si nous avons encore la propriété $oo\cdots o\omega = o$ pour tout $\omega \in \Omega$ (o représentant l'élément nul du groupe $(G, +)$).

Un sous–ensemble I d'un $\Omega$–groupe $(G, \Omega)$ sera dénommé *idéal* de $(G, \Omega)$, et il sera noté avec $I \lhd (G, \Omega)$, si I vérifie les deux propriétés suivantes: *a*) I est un sous–groupe normal de $(G, +)$; *b*) pour tout $i \in I$ et pour tous $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (G, \Omega)$ les relations $-(a_1 a_2 \cdots a_n)\omega + a_1 \cdots a_{j-1}(i + a)$

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) Toutes les applications considérées dans ce travail seront regardées comme des opérateurs à droite.

$a_{j+1}\cdots a_n\,\omega\in \mathrm{I}\ (j=1\,,2\,,\cdots,n)$ subsistent pour tout $\omega\in\Omega$. Un idéal quelconque d'un $\Omega$–groupe $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ est un sous–$\Omega$–groupe de $(\mathrm{G}\,,\Omega)$. La notion de $\Omega$–groupe, introduite par Higgins [1], représente une généralisation commune des notions de groupe et d'anneau; et la notion d'idéal d'un $\Omega$–groupe représente une généralisation commune des notions de sous–groupe normal pour les groupes et d'idéal pour les anneaux. La décomposition d'un $\Omega$–groupe $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ par rapport avec un idéal $(\mathrm{I}\,,\Omega)$ de $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ est définie comme la décomposition du groupe $(\mathrm{G}\,,+)$ par rapport avec le sous–groupe normal $(\mathrm{I}\,,+)$. Toutes les relations de congruences d'un $\Omega$–groupe $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ sont déterminées par les décompositions de $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ par rapport avec les idéaux de $(\mathrm{G}\,,\Omega)$. Il s'ensuit que nous pouvons construire les *$\Omega$–groupes facteurs* $(\mathrm{G}\,,\Omega)/(\mathrm{I}\,,\Omega)$ par rapport avec les idéaux $(\mathrm{I}\,,\Omega)$ de $(\mathrm{G}\,,\Omega)$.

Dans ce qui suit nous considérerons des algèbres universelles du même type, ayant donc le même domaine $\Omega$ d'opérations. Une telle algèbre $(\mathrm{G}\,,\Omega)$ sera notée simplement par G.

Soient $\mathrm{G}\,,\mathrm{G}'$ *et* $\mathfrak{G}$ *trois algèbres universelles du même type*. Nous considérons en chaque algèbre universelle donnée un élément évidencié, fix. Ces élément seront notés avec $0\,,0'$ et $\mathfrak{o}$. Soit $\mathcal{H}=\mathfrak{G}^{\mathrm{G}}$ l'ensemble des applications univoques $\alpha$ de G en $\mathfrak{G}$, et soit $\mathcal{H}'=\mathfrak{G}^{\mathrm{G}'}$ l'ensemble des applications univoques $\alpha'$ de $\mathrm{G}'$ en $\mathfrak{G}$. On note avec $\theta\in\mathcal{H}$ et avec $\theta'\in\mathcal{H}'$ les applications définies respectivement par les égalités: $\mathrm{G}\theta=\{\mathfrak{o}\}\,,\mathrm{G}'\,\theta'=\{\mathfrak{o}\}$. Généralement, si X et Y sont deux algèbres universelles avec le même domaine d'opérations et $\mathrm{O_X}$ représente un élément évidencié de X, alors le *noyau* d'une application univoque $\xi:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ sera défini à la manière suivante: $\mathrm{N}_\xi=\{y\in\mathrm{Y}\,;y\xi=\mathrm{O_X}\}$. Nous observons que le noyeau $\mathrm{N}_\alpha$, respectivement $\mathrm{N}_{\alpha'}$ d'une application $\alpha\in\mathcal{H}$ ou $\alpha'\in\mathcal{H}'$ ne contient pas généralement l'élément 0 ou $0'$.

Considérons maintenant *une application univoque arbitraire* $\varphi$ *de* G *en* $\mathrm{G}'$. Nous faisons correspondre pour tout $\alpha'\in\mathcal{H}'$ un $\alpha\in\mathcal{H}$ unique, conformément au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathrm{G}' \arrow[d, "\alpha'"] \\ & \mathfrak{G} \end{tikzcd}$$

Cela signifie que

$$(1)\qquad \alpha=\varphi*\alpha',$$

où le produit $\varphi*\alpha'$ des applications $\varphi$ et $\alpha'$ est défini au sens habituel.

Soit $\varphi^*$ *une application* (*univoque*) *de* $\mathcal{H}'$ *en* $\mathcal{H}$ *définie par l'égalité*

$$(2)\qquad \alpha=\alpha'\,\varphi^*\qquad(\forall\alpha'\in\mathcal{H}').$$

Ainsi il reste attaché à $\varphi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ une application uniquement déterminée, $\varphi^*:\mathcal{H}'\to\mathcal{H}$. On déduit immédiatement des égalités (1) et (2) que

$$(3)\qquad x\,(\alpha'\,\varphi^*)=x\alpha=x\,(\varphi*\alpha')\qquad(\forall x\in\mathrm{G}).$$

*Observation* 1. – Il résulte, en vertu des égalités (1) et (2), que $\theta = \varphi * \theta'$, donc que $\theta' \varphi^* = \theta$. Il s'ensuit que $\theta' \in N_{\varphi^*} (\forall \varphi^* \in \mathcal{H}^{\mathcal{H}'})$.

On peut introduire en $\mathcal{H}$ respectivement en $\mathcal{H}'$ un système d'opérations $\Omega$ – en fonction des opérations définies en $(\mathcal{G}, \Omega)$ – à la manière suivante: Si $\omega \in \Omega$ est une opération $n$-aire ($n \neq 0$) définie dans $\mathcal{G}$, alors, dans le cas d'un système ordonné quelconque d'éléments $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{H}$ respectivement $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n' \in \mathcal{H}'$, on doit avoir

$$x(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \omega) = (x\alpha_1)(x\alpha_2)\cdots(x\alpha_n)\,\omega \qquad (\forall x \in G)$$

ou respectivement

$$x'(\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_n' \omega) = (x' \alpha_1')(x' \alpha_2')\cdots(x' \alpha_n')\,\omega \qquad (\forall x' \in G').$$

Si $\omega$ est une opération nullaire et on note avec $o_\omega$ l'élément évidencié de $\mathcal{G}$ par l'opération $\omega$, alors l'élément évidencié de $\mathcal{H}$ respectivement de $\mathcal{H}'$ par $\omega$ soit l'élément $\alpha_\omega \in \mathcal{H}$ respectivement $\alpha_\omega' \in \mathcal{H}'$, pour lesquels nous avons $G\alpha_\omega' = o_\omega$ respectivement $G' \alpha_\omega' = o_\omega$. Par ces définitions, $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *deviennent des algèbres universelles du même type que* $(G, \Omega)$. Ces algèbres universelles $(\mathcal{H}, \Omega)$ et $(\mathcal{H}', \Omega)$ seront notées simplement avec $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

THÉORÈME 1. – *L'application* $\varphi^* : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *est une application homomorphe de* $(\mathcal{H}', \Omega)$ *en* $(\mathcal{H}, \Omega)$.

*Démonstration.* – Soit $\omega$ une opération quelconque définie en $\mathcal{H}'$ et $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$ un système arbitraire d'éléments de $\mathcal{H}'$. En employant les formules (3) et les définitions précédemment données pour les opérations en $\mathcal{H}'$ et en $\mathcal{H}$, on obtient pour tout $x \in G$:

$$x[(\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_n' \omega)\varphi^*] = x[\varphi * \alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_n' \omega] = (x\varphi)(\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_n' \omega) =$$

$$= [(x\varphi)\alpha_1'][(x\varphi)\alpha_2']\cdots[(x\varphi)\alpha_n']\,\omega = [x(\varphi * \alpha_1')][x(\varphi * \alpha_2')]\cdots[x(\varphi * \alpha_n')]\,\omega =$$

$$= [x(\alpha_1' \varphi^*)][x(\alpha_2' \varphi^*)]\cdots[x(\alpha_n' \varphi^*)]\,\omega = x[(\alpha_1' \varphi^*)(\alpha_2' \varphi^*)\cdots(\alpha_n' \varphi^*)\,\omega].$$

Donc $(\alpha_1' \alpha_2' \cdots \alpha_n' \omega)\varphi^* = (\alpha_1' \varphi^*)(\alpha_2' \varphi^*)\cdots(\alpha_n' \varphi^*)\,\omega$ et ainsi le théorème et démontré.

Considérons maintenant *une équation*

$$x\varphi = x', \tag{4}$$

*où* $x'$ *un élément arbitrairement fixé de* $G'$. Le problème que nous voulons résoudre ici est le suivant: quelles sont les conditions qui doivent être satisfaites par $x'$ pour la résolubilité en $x$ de l'équation (4) – c'est-à-dire pour l'éxistence au moins d'un élément $x_0 \in G$, tel que $x_0 \varphi = x'$ ?

THÉORÈME 2. – *Soit* $\varphi$ *une application univoque d'algèbre universelle* $G$ *dans l'algèbre universelle* $G'$ *du même type. L'équation* (4) *est résoluble en* $x$ *si et seulement si*

$$x' \in \bigcap_{\alpha' \in N_{\varphi^*}} N_{\alpha'}. \tag{5}$$

*Démonstration*. – Supposons que l'équation (4) est résoluble en $x$, donc l'éxistence d'un élément $x = x_0 \in G$ tel que $x_0\, \varphi = x'$. Alors nous avons, pour tout élément $\alpha' \in N_{\varphi^*}$ (c'est-à-dire pour tout élément $\alpha' \in \mathcal{H}'$ qui satisfait la condition $\alpha'\, \varphi^* = \theta$) : $x'\, \alpha' = (x_0\, \varphi)\, \alpha' = x_0\, (\varphi * \alpha') = x_0\, (\alpha'\, \varphi^*) = x_0\, \theta = \mathfrak{o}$. Il s'ensuit la validité de la relation (5). Donc la condition est nécessaire.

Supposons maintenant la validité de la condition (5) et supposons que l'equation (4) n'est pas résoluble en $x$, c'est-à-dire que $x_0\, \varphi \neq x'$ $(\forall x_0 \in G)$. Il s'ensuit que $x' \notin G\varphi$. Puisque $\mathcal{H}'$ contient toutes les applications univoques de $G'$ en $\mathcal{G}$, il s'ensuit l'éxistence d'éléments de $\mathcal{H}'$ tels que leurs noyaux est égal à $G\varphi$. Soit $\alpha' \in \mathcal{H}'$ un tel élément: $N_{\alpha'} = G\varphi$. Il s'ensuit que, pour cet élément $\alpha' \in \mathcal{H}'$, nous avons la relation

$$x' \notin N_{\alpha'} \,. \tag{6}$$

D'autre part, il résulte – conformément à l'égalité (3) et $G\varphi = N_{\alpha'}$ – que $x\,(\alpha'\, \varphi^*) = x\,(\varphi * \alpha') = (x\varphi)\, \alpha' = \mathfrak{o}\ (\forall x \in G)$. Cela signifie que $a'\, \varphi^* = \theta$, donc que

$$\alpha' \in N_{\varphi^*} \,. \tag{7}$$

Nous avons ainsi construit un élément $\alpha' \in \mathcal{H}'$, satisfaisant aux condition (7) et (6). Il résulte l'impossibilité de la relation (5). Donc la condition est aussi suffisante.

Soient maintenant $G$ , $G'$ *et* $\mathcal{G}$ *trois* $\Omega$*-groupes du même type*. Les notions introduites dans le cas général seront utilisées dans leurs sens étendu avec les suivantes exceptions: nous admettons que les éléments $o$ , $o'$ et $\mathfrak{o}$ coincident avec les *éléments nuls* des $\Omega$-groupes considérés et nous remplaçons l'ensemble $\mathcal{H}'$ avec l'ensemble $\mathcal{H}'_h$ *de tous les homomorphismes* $\alpha'_h : G' \to \mathcal{G}$. (Nous observons que dans ce cas le noyau d'une application $\alpha \in \mathcal{H}$ ne contient pas généralement l'élément $o \in G$, mais le noyau d'un $\alpha' \in \mathcal{H}'_h$ contient toujours l'élément $o' \in G'$).

Dans ce cas, l'affirmation du théorème 2 n'est pas valable par rapport avec une algèbre universelle $\mathcal{G}$ quelconque (du même type que $G$ et $G'$). Mais nous montrerons que, si $\varphi$ satisfait une certaine propriété, alors il éxiste un $\Omega$-groupe $\mathcal{G}$ par rapport auquel la validité du théorème 2 peut être préservée. Pour démontrer cette affirmation, nous introduisons pour la première fois une notion – suggérée par la démonstration du théorème 2.

Soient $G$ et $G'$ deux $\Omega$-groupes donnés (du même type), et soit $\varphi$ une application (univoque) de $G$ en $G'$. Nous disons qu'un $\Omega$-groupe $\mathcal{G}$ a la *propriété* $\Phi$ si et seulement si: $\alpha$) $\mathcal{G}$ est du même type que $G$ et $G'$; $\beta$) pour tout $x' \notin G\varphi$, il éxiste un élément $\alpha'_h \in \mathcal{H}'_h$ $(\alpha'_h \neq \theta')$ tel que $x' \notin N_{\alpha'_h}$ et $\alpha'_h \in N_{\varphi^*}$.

LEMME 1. – *Soient* $G$ *et* $G'$ *deux* $\Omega$*-groupes du même type. Si l'application univoque* $\varphi : G \to G'$ *a la propriété que* $G\varphi$ *est un ideal de* $G'$, *alors il éxiste un* $\Omega$*-groupe* $\mathcal{G}$ *avec la propriété* $\Phi$.

*Démonstration*. – Considérons les $\Omega$-groupes facteurs $G'/I'$ par rapport avec tous les idéaux $I'$ de $G'$, et formons le produit direct complet $\mathcal{G} = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{I' \in J'} G'/I'$

de ces $\Omega$-groupes ($J'$ dénote l'ensemble de tous les idéaux de $G'$). G admet par construction la propriété $\alpha$); mais il vérifie aussi la condition $\beta$). En effet, soit $x' \in G\varphi$. Puisque $G\varphi$ est un idéal de $G'$, il éxiste un $\alpha'_h \in \mathcal{H}'_h$ ($\alpha'_h \neq \theta'$) tel que $N_{\alpha'_h} = G\varphi$ ($\alpha'_h$ est l'application de $G'$ sur le component $G'/G\varphi$ du produit direct considéré). D'autre part, en utilisant les relations (3) et $G\varphi = N_{\alpha'_h}$, nous déduisons: $x(\alpha' \varphi^*) = x(\varphi * \alpha'_h) = (x\varphi)\alpha'_h = 0$. Il s'ensuit que $\alpha'_h \varphi^* = 0$, donc que $\alpha'_h \in N_{\varphi^*}$.

THÉORÈME 3. – *Soit* $\varphi$ *une application univoque du* $\Omega$*-groupe* G *dans le* $\Omega$*-groupe* $G'$ *du même type, pour laquelle* $G\varphi$ *est un idéal de* $G'$. *Alors l'équation* (4) *est résoluble en* $x$ *si et seulement si*

$$x' \in \bigcap_{\alpha'_h \in N_{\varphi^*}} N_{\alpha'_h} \tag{6}$$ (2)

*où les* $\alpha'_h$ *sont des applications homomorphes de* $G'$ *dans un* $\Omega$*-groupe* $\mathcal{G}$ *avec la propriété* $\Phi$.

*Démonstration.* – L'existence du $\Omega$-groupe $\mathcal{G}$ avec la propriété $\Phi$ est assurée par le lèmme 2. La résolubilité en $x$ de l'équation (4) implique – conformément au théorème 2 – la validité de la relation (5). En vertu de l'inclusion $\mathcal{H}'_h \subset \mathcal{H}$, il résulte la relation (6) (voir la note 2). Donc la condition est nécessaire.

Supposons maintenant la validité de (6) et supposons que $x_0\varphi \neq x'$ ($\forall x_0 \in G$), donc que $x' \notin G\varphi$. Puisque $\mathcal{G}$ a la propriété $\Phi$, il éxiste une application $\alpha'_h \in \mathcal{H}'_h$ ($\alpha'_h \neq \theta'$), telle que $x' \notin N_{\alpha'_h}$ et $\alpha'_h \in N_{\varphi^*}$. Il s'ensuit l'impossibilité de la relation (6). Donc il éxiste au moins un $x_0 \in G$ tel que $x_0\varphi = x'$, et ainsi la condition est aussi suffisante.

*Observation* 2. – Si $\varphi: G \to G'$ est une application homomorphe, alors – en vertu de l'égalité (1) – $\alpha = \varphi * \alpha'_h$ est une application homomorphe de G en $\mathcal{G}$. Il résulte que dans ce cas le théroème 3 devient valable si l'on remplace l'ensemble $\mathcal{H}$ avec l'ensemble $\mathcal{H}_h$ de toutes les applications homomorphes $\alpha_h: G \to \mathcal{G}$.

Nous considérons maintenant le suivant cas particulier: G *et* $G'$ *sont deux espaces linéaires définis sur le même corps* K. Le module (groupe additif) $K^+$ de K peut être regardé comme un espace linéaire défini sur le corps K (donc comme un $\Omega$-groupe spécial du même type que les $\Omega$-groupes spéciaux G et $G'$). Le théorème 3 est évidemment valable dans ce cas; mais nous montrerons – pour nous nous raprocher à des conceptions classiques de cette théorie – que, dans ce cas, même $K^+$ peut être considéré comme un espace linéaire $\mathcal{G}$ avec la propriété $\Phi$.

(2) La condition (6) est plus faible que la (5), parceque $\mathcal{H}'_h \subset \mathcal{H}$, d'où il résulte que

$$\bigcap_{\alpha'_h \in N_{\varphi^*}} N_{\alpha'_h} \supseteq \bigcap_{\alpha' \in N_{\varphi^*}} N_{\alpha'} .$$

LEMME 2. – *Soient* G *et* G′ *deux espaces linéaires définis sur le même corps* K *et soit* $K^+$ *le module de* K. *Si* $\varphi : G \to G'$ *est une application homomorphe* (*transformation linéaire*), *alors l'espace linéaire* $K^+$ *défini sur* K *a la propriété* $\Phi$.

*Démonstration.* – Il faut démontrér que l'espace linéaire $K^+$ vérifie la propriété β). Soit $x'$ un élément arbitraire de $G'$ pour lequel on ait $x' \notin G\varphi$. Nous considerons le sous-espace linéaire $Kx' = \{kx' ; k \in K\}$ de $G'$. Soit $L_0$ le sous-espace linéaire de $G'$ engendré par les sous-espaces $G\varphi$ et $Kx'$. On démontre facilement que $G\varphi \cap Kx' = \{o'\}$. En effet, si $y \in G\varphi \cap Kx'$ $(y \neq o)$, alors $y = kx'$ $(k \in K)$, d'où il résulte que $x' = k^{-1} y \in G\varphi$. Il s'ensuit qu'un élément quelconque $z$ de $L_0$ peut être écrit d'une façon unique sous la forme $z = x_0 \varphi + kx'$, où $x_0 \in G$, $k \in K$.

Nous définissons maintenant une application $f_0 : L_0 \to K^+$ par l'égalité

$$zf_0 = kk_0 \qquad (\forall z \in L), \tag{7}$$

où $k_0 \neq o$ est un élément quelconque de K. L'application $f_0$ a les trois propriétés suivantes:

*a*) $f_0$ est une application homomorphe de $L_0$ en $K^+$. En effet, la représentation univoque de $z$ dans la forme $z = x_0 \varphi + kx'$ implique l'univocité de $f_0$. Soient $z_1$ et $z_2$ deux éléments quelconques de $L_0 : z_1 = x_1\varphi + k_1 x'$, $z_2 = x_2 \varphi + k_2 x'$, où $x_1, x_2 \in G_0$ et $k_1, k_2 \in K$. Il s'ensuit que $(z_1 + z_2) f_0 = [(x_1 + x_2)\varphi + (k_1 + k_2) x'] f_0 = (k_1 + k_2) k_0 = k_1 k_0 + k_2 k_0 = z_1 f_0 + z_2 f_0$. Soient $z$ et $c$ éléments quelconque de $L_0$ ou respectivement de K. Alors nous avons: $(cz) f_0 = [c(x_0 \varphi + kx')] f_0 = [(cx_0)\varphi + (ck) x'] f_0 = (ck) k_0 = c(kk_0) = c(zf_0)$.

*b*) $x' \notin N_{f_0}$. En effet, $x' = 1 \cdot x'$, où 1 désigne l'élément unité de K. Il s'ensuit que $x' f_0 = 1 \cdot k_0 = k_0 \neq o$.

*c*) $G\varphi \subseteq N_{f_0}$. En effet, puisque tout élément $z \in G\varphi$ peut être écrit sous la forme $z = x_0 \varphi + o \cdot x'$, nous avons $zf_0 = o$.

Nous montrons maintenant – en utilisant un raisonnement suggéré par la démonstration du théorème de Banach–Hahn concernant le prolongement des fonctionnelles linéaires continues (voir par exemple [3]), qu'il éxiste un prolongement $\bar{f}$ de $f_0$ qui a aussi les propriétés *a*), *b*) et *c*).

Si $L_0 = G'$, alors $\bar{f} = f_0$. Supposons donc que $L_0 \subset G'$ $(L_0 \neq G')$. Soit $x''$ un élément arbitraire de l'ensemble complémentaire $G' \setminus L_0$ relativement à $G'$, et soit $L_1$ le sous-espace linéaire de $G'$ engendré par $L_0$ et $Kx''$. Puisque $L_0 \cap Kx'' = \{o'\}$, tout élément $z \in L_1$ peut être représenté d'une façon unique sous la forme $z = z_0 + kx''$, où $z_0 \in L_0$, $k \in K$. Définissons une application $f_1 : L_1 \to K^+$ par l'egalité

$$zf_1 = z_0 f_0 \qquad (\forall z \in L_1). \tag{8}$$

En tenant compte du fait que $f_0$ possède les propriétés *a*), *b*), *c*), il s'ensuit – en vertu de la définition (8) – que les propriétés *a*), *b*) et *c*) sont valables aussi pour $f_1$, et nous avons encore: $z_0 f_1 = z_0 f_0$ $(\forall z_0 \in L_0)$. Il s'ensuit que $f_1$ est un prolongement propre de $f_0$ à l'espace $L_1$ ayant les propriétés *a*) *b*) et *c*).

Nous faisons correspondre à chaque prolongement propre $f: L \to K^+$ $(L_0 \subset L)$ de $L_0$, qui vérifie les propriétés *a*), *b*) et *c*), le couple $(f, L)$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous ces couples. Puisque $(f_1, L_1) \in \mathfrak{M}$, il s'ensuit que $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. On introduit en $\mathfrak{M}$ une relation de la manière suivante:

$$(9) \qquad (f', L') \leq (f'', L'') \Longleftrightarrow L' \subseteq L'' \quad \text{et} \quad zf' = zf'' \; (\forall z \in L').$$

On démontre sans difficulté que $(\mathfrak{M}, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Considérons une chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) quelconque $\{(f_\nu, L_\nu); \nu \in I\}$ de $\mathfrak{M}$ (I est un ensemble d'indexes ordonné par rapport à une relation, qui sera notée avec $\leq$). Puisque $L_\nu$ est un sous-espace de $L_\mu$, si $\nu \leq \mu$, il s'ensuit que $L = \bigcup_{\nu \in I} L_\nu$ est un sous-espace de $G'$. Si $z$ est un élément quelconque de L, alors il éxiste un index $\nu \in I$ de façon que $z \in L_\nu$ (et $z \in L_\mu$ pour tout $\mu \geq \nu$). Il en résulte qu'on peut définir une application $f: L \to K^+$ par l'égalité,

$$(10) \qquad zf = zf_\nu \qquad (\forall z \in L),$$

où $\nu$ est un index avec la propriété specifiée dans la dernière proposition. On démontre sans difficulté que $(f, L) \in \mathfrak{M}$ et que $(f_\nu, L_\nu) \leq (f, L)$ pour tout $\nu \in I$. Donc $(\mathfrak{M}, \leq)$ vérifie la condition de maximalité pour les chaines définies en $(\mathfrak{M}, \leq)$. Il s'ensuit, conformément au lèmme du Zorn–Kuratowski, que dans le cas d'un élément quelconque de $(\mathfrak{M}, \leq)$, donc aussi dans le cas d'élément $(f_0, L_0)$, il éxiste un élément maximal $(\bar{f}, \bar{L})$ de $(\mathfrak{M}, \leq)$ qui satisfait la relation $(f_0, L_0) \leq (\bar{f}, \bar{L})$.

Nous démontrons maintenant que $\bar{L} = G'$. En effet, soit $\bar{L}$ un sous-espace propre de $G'$. Alors il est possible de construire un $(\bar{f}_1, \bar{L}_1) \in (\mathfrak{M}, \leq)$ – d'une manière analogue à celle de la construction de $(f_1, L_1) \in (\mathfrak{M}, \leq)$ à partir de $(f_0, L_0)$ – tel que $(\bar{f}, \bar{L}) \leq (\bar{f}_1, \bar{L}_1)$ et $L \neq L_1$. Mais ceci contredit la maximalité de $(\bar{f}, \bar{L})$.

Il s'ensuit que $\bar{f} = \alpha'_h$ est une application de G en $K^+$ ayant les propriétés *a*), *b*) et *c*). Nous observons que, en vertu de la propriété *c*) pour $\alpha'_h$, il s'ensuit que $x(\alpha'_h \varphi^*) = x(\varphi * \alpha'_h) = (x\varphi)\alpha'_h = 0' \, (\forall z \in G)$, donc $\alpha'_h \in N_{\varphi^*}$. Il résulte que l'espace linéaire $K^+$ satisfait la propriété $\beta$), donc il a la propriété $\Phi$.

En vertu du lèmme 2 – en tenant compte du fait que l'image homomorphe d'un espace linéaire est un espace linéaire – le théorème suivant est une conséquence immediate du théorème 3:

THÉORÈME 4. – *Soient* G *et* $G'$ *deux espaces linéaires définis sur le même corps* K *et soit* $\varphi$ *une application homomorphe* (*transformation linéaire*) *de* G *en* $G'$. *Alors l'equation* (4) *est résoluble en* $x$ *si et seulement si la condition* (6) *est satisfaite, où les* $\alpha'_h$ *sont des applications homomorphes* (*transformations linéaires*) *de* $G'$ *dans l'espace linéaire* $K^+$.

*Observation* 3. – Soient $V_n, V_m$ des espaces vectoriels respectivement de diménsions $n, m$. La résolubilité d'un système d'équations linéaires

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ est équivalente à la résolubilité en X de l'équation $X\varphi_A = B$, où $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_n$, $B = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \in V_m$ et $\varphi_A : V_n \to V_m$ est la transformation linéaire déterminée par la matrice $A = (a_{ij}) \ (i = 1, \cdots, m ; j = 1, \cdots, n)$. Si l'on applique le théorème 4 dans ce cas particulier, on obtient le théorème classique de Rouché rélativement à la résolubilité des systèmes d'équations linéaires.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. HIGGINS, *Groups with multiple operators*, « Proc. London Hath. Soc. » *6*, 366–416 (1956).

[2] A. G. KUROŠ, *Vorlesungen über allgemeine Algebra*, Leipzig 1964.

[3] F. RIESZ et B. SZŐKEFALVI NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1954.