Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ion Purdea

Quelques propriétés des relations difonctionnelles

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.6, p. 720–726.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_6_720_0>

Algebra. — *Quelques propriétés des relations difonctionnelles.* Nota di ION PURDEA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si estendono alcune proprietà note delle applicazioni alle cosiddette relazioni difunzionali.

Riguet [2] a introduit la notion de relation difonctionnelle laquelle généralise celle d'application et celle de relation d'équivalence. V. V. Wagner [3] l'appelle relation quasi-univoque.

DÉFINITION. – *La relation* $R \subseteq A \times B$ *est difonctionnelle si une des conditions suivantes et satisfaite*:

1) $R \overset{-1}{R} R \subseteq R$,

2) $R(a_1) \cap R(a_2) \neq \varnothing$ [1] $\Longleftrightarrow R(a_1) = R(a_2)$.

Dans le mémoire cité auparavant Riguet montre que, pour chaque relation difonctionnelle R, il existe une application bijective

$$\theta : \frac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R} R} \to \frac{R(A)}{R \overset{-1}{R}},$$

nommée application canonique.

Dans ce qui suit on donne quelques propriétés nouvelles des relations difonctionnelles, qui sont bien connues dans le cas des applications.

THÉORÈME 1. – *Soit* $R \subseteq A \times B$ *une relation difonctionnelle et*

$$\varphi \subseteq A \times \frac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R} R} \quad , \quad \varphi \subseteq B \times \frac{R(A)}{R \overset{-1}{R}}$$

des applications partielles. Si

$$(a, \overset{-1}{R} R(a_1)) \in \varphi \Longleftrightarrow (a, a_1) \in \overset{-1}{R} R, \tag{1}$$

$$(b, R \overset{-1}{R}(b_1)) \in \psi \Longleftrightarrow (b, b_1) \in R \overset{-1}{R}, \tag{2}$$

alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R} R} \arrow[r, "\theta"'] & \dfrac{R(A)}{R \overset{-1}{R}} \end{tikzcd} \tag{3}$$

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1968.

(1) ∅ est l'ensemble vide.

est commutatif, c'est-à-dire

(4) $$\psi R = \theta\varphi .$$

Démonstration. – Soit $(a , R \overset{-1}{R}(b)) \in \psi R$. Il en résulte l'existence d'un élément $b_1 \in B$ tel que

(5) $$(a , b_1) \in R$$

et

(6) $$(b_1 , R \overset{-1}{R}(b)) \in \psi .$$

(2) et (6) donnent $R \overset{-1}{R}(b_1) = R \overset{-1}{R}(b)$; de (5) et la définition de θ il résulte

(7) $$(\overset{-1}{R} R(a) , R \overset{-1}{R}(b)) \in \theta .$$

De (1) et (5) nous avons

(8) $$(a , \overset{-1}{R} R(a)) \in \varphi ,$$

et de (7) et (8): $(a , R \overset{-1}{R}(b)) \in \theta\varphi$. Donc

(9) $$\psi R \subseteq \theta\varphi .$$

Soit maintenant $(a , R \overset{-1}{R}(b)) \in \theta\varphi$. Cela assure l'existence d'une classe

$$\overset{-1}{R} R(a_1) \in \frac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R} R}$$

telle que

(10) $$(a , \overset{-1}{R} R(a_1)) \in \varphi$$

et

(11) $$(\overset{-1}{R} R(a_1) , R \overset{-1}{R}(b)) \in \theta .$$

Mais $\overset{-1}{R} R$ est une relation d'équivalence partielle (symmétrique et transitive) et (1), (10) et (11) nous donnent $(a , \overset{-1}{R} R(a)) \in \varphi$ et $(\overset{-1}{R} R(a) , R \overset{-1}{R}(b)) \in \theta$. Ceci entraîne, compte tenu de la définition de θ: $(a , b) \in R$ et $(b , R \overset{-1}{R}(b)) \in \psi$. Donc $(a , R \overset{-1}{R}(b)) \in \psi R$ et

(12) $$\theta\varphi = \psi R .$$

Conséquences:

1) De $pr_1 \psi = pr_2 R$ et de (4) il résulte

(13) $$R = \overset{-1}{\psi} \theta\varphi .$$

2) La relation $R \subseteq A \times B$ est une relation difonctionnelle si et seulement s'il y a deux applications partielles $\varphi \subseteq A \times A'$ et $\psi \subseteq B \times B'$ et une bijection $\theta \subseteq A' \times B'$ telle que

$$R = \overset{-1}{\psi}\theta\varphi .$$

En effet, soit $b \in \overset{-1}{\psi}\theta\varphi(a)$ et $b \in \overset{-1}{\psi}\theta\varphi(a_1)$. Il existe donc $a', a'_1 \in A'$; $b', b'_1 \in B'$ telles que

$$(a, a') \in \varphi \quad ; \quad (a', b') \in \theta \quad ; \quad (b', b) \in \overset{-1}{\psi} ;$$

$$(a_1, a'_1) \in \varphi \quad ; \quad (a'_1, b'_1) \in \theta \quad ; \quad (b'_1, b) \in \overset{-1}{\psi} .$$

Cela signifie que $b' = b'_1$, car ψ est une application partielle. Donc $\overset{-1}{\psi}\theta\varphi(a) = \overset{-1}{\psi}(b') = \overset{-1}{\psi}\theta\varphi(a_1)$. La condition 2) de notre définition nous montre maintenant que $\overset{-1}{\psi}\theta\varphi$ est une relation difonctionelle.

3) Si $R \subseteq A \times B$ est une application, alors $R\overset{-1}{R} = \Delta_{R(A)}$, où $\Delta_{R(A)}$ est la diagonale de $R(A) \times R(A)$, et $\overset{-1}{\psi}$ est l'application d'inclusion de $R(A)$ dans B et $\overset{-1}{R}(B) = A$. Dans ce cas le diagramme (3) devient:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\
\dfrac{A}{\overset{-1}{R}R} \arrow[r, "\theta"'] & R(A) \arrow[u, "\overset{-1}{\psi}"']
\end{tikzcd}$$

4) Si $R \subseteq A \times A$ est une relation d'équivalence alors $R(A) = \overset{-1}{R}(A) = A$, $R\overset{-1}{R} = \overset{-1}{R}R = R$, $\psi = \varphi$ et $\theta = \Delta_{A/R\overset{-1}{R}}$, et la diagramme (3) devient:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \\
& \dfrac{A}{R} \arrow[ur, "\overset{-1}{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME 2. – *Si* $R \subseteq A \times B$ *est une relation difonctionnelle et* Q *une relation d'équivalence partielle, telle que* $Q \subseteq \overset{-1}{R}R$, $pr\, Q = pr_1\, R$, *alors il y a une application unique*

$$\overline{\theta} : \frac{\overset{-1}{R}(B)}{Q} \longrightarrow \frac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$$

et le diagramme

$$
(14) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi'"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ \dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{Q} \arrow[r, "\overline{\theta}"'] & \dfrac{R(A)}{R\overset{-1}{R}} \end{tikzcd}
$$

est commutatif, où φ' *est défini de la manière suivante:*

$$(15) \qquad (a\,,\, Q\,(a_1)) \in \varphi' \Longleftrightarrow (a\,,\, a_1) \in Q\,.$$

Démonstration. – Soit $\overline{\theta}: \dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{Q} \to \dfrac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$ l'application telle que

$$(16) \qquad (Q\,(a)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \overline{\theta} \Longleftrightarrow (\overset{-1}{R}R\,(a),\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \theta$$

où θ est la bijection canonique de la difonctionnelle R. Soit $(a\,,\overset{-1}{R}R\,(b)) \in \overline{\theta}\varphi'$. Cela signifie qu'il existe une classe $Q\,(a_1) \in \dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{Q}$ telle que

$$(17) \qquad (a_1\,,\, Q\,(a_1)) \in \varphi'$$

et

$$(18) \qquad (Q\,(a_1)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \overline{\theta}\,.$$

De (15), (17) et (18) il résulte $(Q\,(a)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \overline{\theta}$ et ensuite, compte tenu de (16), on a $(\overset{-1}{R}R\,(a)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \theta$. Donc

$$(19) \qquad (a\,,\, b) \in R\,.$$

De (2) et (19) il résulte $(b\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \psi$, et de (19) $(a\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \psi R$. Donc

$$(20) \qquad \overline{\theta}\varphi' \subseteq \psi R\,.$$

Soit maintenant $(a\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \psi R$. Cela assure l'existence d'un $b \in B$ tel que

$$(21) \qquad (a\,,\, b) \in R$$

et

$$(22) \qquad (b\,,\, R\overset{-1}{R}\,(b)) \in \psi.$$

(21) et (22) donnent $(R\overset{-1}{R}(a)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \theta$. D'ici et de (16) il résulte $(Q\,(a)\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \overline{\theta}$; donc, tenant compte de $(a\,,\, Q\,(a)) \in \varphi'$, nous avons $(a\,,\, R\overset{-1}{R}(b)) \in \overline{\theta}\varphi'$, c'est-à-dire

$$(23) \qquad \psi R \subseteq \overline{\theta}\varphi'.$$

(20) et (23) assurent la commutativité du diagramme (14).

Démonstrons l'unicité. Soit

$$\overline{\theta}_1 : \frac{\overset{-1}{\mathrm{R}}(\mathrm{B})}{\mathrm{Q}} \longrightarrow \frac{\mathrm{R}(\mathrm{A})}{\mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}}$$

une autre application, telle que

$$\overline{\theta}_1 \varphi' = \psi \mathrm{R}. \tag{24}$$

Cela signifie que $(a , \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}(b)) \in \overline{\theta}_1 \varphi'$. Compte tenu de (24) il résulte l'existence d'un $b_1 \in \mathrm{B}$ tel que $(a , b_1) \in \mathrm{R}$ et $(b_1 , \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}(b)) \in \psi$, c'est-à-dire $(a , b) \in \mathrm{R}$ et $(\overset{-1}{\mathrm{R}}\mathrm{R}(a) , \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}(b)) \in \theta$. Il résulte que $(\mathrm{Q}(a) , \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}(b)) \in \overline{\theta}$, donc $\overline{\theta} = \overline{\theta}_1$.

Conséquences:

1) Soit $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ une application. Alors le diagramme (14) devient:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\mathrm{R}"] \arrow[d, "\varphi'"'] & \mathrm{B} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{A}/\mathrm{Q} \arrow[r, "\theta"'] & \mathrm{R}(\mathrm{A})
\end{tikzcd}$$

où $\overset{-1}{\psi}$ est l'application d'inclusion de l'ensemble $\mathrm{R}(\mathrm{A})$ dans B.

2) Si $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ est une relation d'équivalence alors le diagramme (14) devient

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\mathrm{R}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{A} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{A}/\mathrm{Q} \arrow[r, "\overline{\theta}"'] & \mathrm{A}/\mathrm{R}
\end{tikzcd}$$

3) Si $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{B}$ est une relation d'équivalence telle que $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{R}\overset{-1}{\mathrm{R}}$, $pr\, \mathrm{P} = pr_2\, \mathrm{R}$, alors il y a une application unique

$$\overline{\theta}' : \frac{\mathrm{R}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}} \longrightarrow \frac{\overset{-1}{\mathrm{R}}(\mathrm{B})}{\overset{-1}{\mathrm{R}}\mathrm{R}}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\overset{-1}{\mathrm{R}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{B} \arrow[d, "\psi'"] \\
\dfrac{\overset{-1}{\mathrm{R}}(\mathrm{B})}{\overset{-1}{\mathrm{R}}\mathrm{R}} \arrow[r, "\overline{\theta}'"'] & \dfrac{\mathrm{R}(\mathrm{A})}{\mathrm{P}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où ψ' est défini de la même manière que φ'.

Si $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est une relation difonctionnelle, alors $\overset{-1}{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$ est aussi une relation difonctionnelle. Donc notre observation résulte du théorème 2.

THÉORÈME 3. – *Si* $R \subseteq A \times B$ *est une relation difonctionnelle, alors il y a un isomorphisme* F *entre le treillis* $E(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R)$ *des relations d'équivalence de* $\overset{-1}{R}(B)$ *qui contiennent* $\overset{-1}{R}R$ *et le treillis* $E(R(A), R\overset{-1}{R})$ *des relations d'équivalence qui contiennent* $R\overset{-1}{R}$. *Soit* $Q \in E(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R)$. *Il existe une bijection* $\theta_1 : \dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{Q} \to \dfrac{R(A)}{F(Q)}$ *qui définit une relation difonctionnelle* $\overline{R} \subseteq A \times B$ *telle que* $R \subseteq \overline{R}$, $\overset{-1}{\overline{R}}\overline{R} = Q$, $\overline{R} \cdot \overset{-1}{\overline{R}} = F(Q)$.

Démonstration. – Soit

$$\theta : \frac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R}R} \longrightarrow \frac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$$

l'application canonique de la relation difonctionnelle R et I un esemble de même puissance que les ensembles $\dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R}R}$ et $\dfrac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$. Indexons bijectivement les ensemble

$$\frac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R}R} \; , \; \frac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$$

par I, de la manière suivante:

Si $(A_i)_{i \in I}$ sont les éléments $\dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{\overset{-1}{R}R}$, alors $B_i = \theta(A_i)$, $i \in I$ sont les éléments de $\dfrac{R(A)}{R\overset{-1}{R}}$. Nous avons

$$\overset{-1}{R}(B) = \bigcup_{i \in I} A_i \quad , \quad A_{i_1} \cap A_{i_2} = \theta \qquad \text{si} \quad i_1 \neq i_2 ,$$

$$R(A) = \bigcup_{i \in I} B_i \quad , \quad B_{i_1} \cap B_{i_2} = \varnothing \qquad \text{si} \quad i_1 \neq i_2 .$$

Soit $Q \in E(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R)$ et A_j $(j \in J)$ les éléments de $R(B)/Q$. Nous avons

$$\overset{-1}{R}(B) = \bigcup_{j \in J} A_j \quad , \quad A_{j_1} \cap A_{j_2} = \varnothing \qquad \text{si} \quad j_1 = j_2 ;$$

$\overset{-1}{R}R \subseteq Q$ donne $A_j = \bigcup_{i_j \in I_j} A_{i_j}$ où $I_j \subseteq I$, $j \in J$. Les sousensembles

$$B_j = \bigcup_{i_j \in I_j} B_{i_j} \, , \qquad j \in J$$

de l'ensemble $R(A)$ constituent une décomposition en classes disjointes de $R(A)$, c'est-à-dire

(25) $$R(A) = \bigcup_{j \in J} B_j \quad , \quad B_{j_1} \cap B_{j_2} = \varnothing \qquad \text{si} \quad j_1 = j_2 .$$

Soit $F(Q)$ la relation d'équivalence définie par (25). L'application $F : E(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R) \rightarrow E(R(A), R\overset{-1}{R})$ est injective. En effet, si $F(Q_1) = F(Q_2)$, alors les deux décompositions définies, de Q_1 et Q_2, sont égales; donc $Q_1 = Q_2$. L'application F est surjective. En effet, si $\bar{Q} \in E(R(A), R\overset{-1}{R})$, alors

$$\frac{R(A)}{\bar{Q}} = (B_j)_{j \in J},$$

où $B_j = \bigcup_{i_j \in I_j} B_{i_j}$, $j \in J$ et Q est une relation d'équivalence définie par la décomposition $A_j = \bigcup_{i_j \in I_j} A_{i_j}$, $j \in J$, alors $F(Q) = \bar{Q}$. Donc F est une application bijective.

Soit $Q_1, Q_2 \in E(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R)$, $Q_1 \subseteq Q_2$. De la définition de F il résulte $F(Q_1) \subseteq F(Q_2)$. Réciproquement, de $F(Q_1) \subseteq F(Q_2)$ il résulte $Q_1 \subseteq Q_2$.

Les résultats obtenus nous montrent que E est une application isomorphe du treillis $C(\overset{-1}{R}(B), \overset{-1}{R}R)$ sur le treillis $E(R(A), R\overset{-1}{R})$.

Si $\dfrac{\overset{-1}{R}(B)}{Q} = (A_j)_{j \in J}$, $\dfrac{R(A)}{F(Q)} = (B_j)_{j \in J}$, alors l'application $\theta_1(A_j) = B_j$ est bijective. La relation

$$\bar{R} = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j$$

est une difonctionnelle pour laquelle $R \subseteq \bar{R}$, $\overset{-1}{\bar{R}}\bar{R} = Q$ et $\bar{R}\overset{-1}{\bar{R}} = F(Q)$.

Conséquences:

1) Si $R \subseteq A \times B$ est une application, alors $R\overset{-1}{R} = \Delta_{R(A)}$ et F est un isomorphisme pour les treillis $E(A, \overset{-1}{R}R)$ et $E(R(A))$ de toutes les relations d'équivalence de A.

2) Si $R \subseteq A \times A$ est une relation d'équivalence, alors F devient l'isomorphisme identique du treillis $E(A)$ des relations déquivalence de A.

3) On peut définir aussi l'application θ_1 de la manière suivante:

$$\theta_1(Q(a)) = (F(Q))(b),$$

si et seulement s'il existe un $a' \in Q(a)$ et un $b' \in (F(Q))(b)$ tels que

$$\theta(\overset{-1}{R}R(a')) = R\overset{-1}{R}(b').$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. M. COHN, *Universal algebra*, New York 1965.

[2] J. RIGUET, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, « Bull. Soc. math. France », 76, 114–155 (1948).

[3] V. V. WAGNER, *Teoria otnoşenii i alghebra ciasticinîh otobrajenii*, Sbornic statei; *Teoria polugrupp i ee prilojenia*, « Izv. Saratovsk, Un-ta », 3–178 (1965).