Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Mehmet Namik Oğuztöreli

Programmazione dei calcoli con calcolatrici elettroniche per le soluzioni di una classe di sistemi polivibranti. - I. Determinazione delle funzioni di Green spettanti ai problemi al contorno polivibranti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.6, p. 713–719.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_6_713_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 20 giugno 1968

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Programmazione dei calcoli con calcolatrici elettroniche per le soluzioni di una classe di sistemi polivibranti. – I. Determinazione delle funzioni di Green spettanti ai problemi al contorno polivibranti.* Nota [*] di DEMETRIO MANGERON [1], [2] e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELİ [3], presentata [**] dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Determination of Green's function pertaining to certain boundary value problems for polyvibrating equations is accomplished and some of their properties have been studied.

1. Si deve a Mauro Picone un teorema fondamentale che sottolinea la portata della nozione di *derivata totale* [1]

$$f' = \frac{\partial^m f}{\partial x_1 \, \partial x_2 \cdots \partial x_m}$$

di una funzione $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, da Lui introdotta.

Per un numero qualunque m di dimensioni, questo teorema si enuncia come segue:

TEOREMA I (di Picone). *Ad una funzione $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ da definirsi in un iperparallelepipedo*

$$P\{a_i \leq x_i \leq b_i, \, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1968.

(1) Istituto Politecnico di Iași, Repubblica Socialista Romania. Per il momento in qualità di «Visiting Professor» nell'*University of Alberta, Department of Mathematics*, Edmonton, Alberta, Canada.

(2) The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(3) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

si possono arbitrariamente assegnare i suoi valori sui 2^m *vertici dell'iperparallelepipedo, le sue derivate totali seconde su tutte le porzioni di varietà lineari che ne costituiscono la frontiera, cominciando dalle* $2^{m-1} C_m^1$ *«rette», passando poi nel caso generale alle* $2^{m-i} C_m^i$ *varietà lineari* V^i *ad i dimensioni e terminando coi* $2m$ *iperpiani, facce di esso e la derivata seconda totale nell'interno dell'iperparallelepipedo, in seguito a che essa riesce determinata e data dalla formula*:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad f = {} & f^{a_1 a_2 \cdots a_m} \prod_{i=1}^{m} (b_i - x_i) + \sum_{i=1}^{m} f^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_m} (b_1 - x_1) \cdots \\
& (b_{i-1} - x_{i-1})(x_i - a_i)(b_{i+1} - x_{i+1}) \cdots (b_m - x_m) \\
& + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{m} f^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} b_j a_{j+1} \cdots a_m} (b_1 - x_1) \cdots \\
& (b_{i-1} - x_{i-1})(x_i - a_i)(b_{i+1} - x_{i+1}) \cdots (b_{j-1} - x_{j-1})(x_j - a_j)(b_{j+1} - x_{j+1}) \cdots \\
& (b_m - x_m) + \cdots + f^{b_1 b_2 \cdots b_m} \prod_{i=1}^{m} (x_i - a_i) \\
& + \sum_{(x_1, x_2, \cdots, x_m)} \left\{ \prod_{i=2}^{m} (b_i - x_i) \int_{a_1}^{b_1} G(x_1, \xi_1) f_{x_2 x_3 \cdots x_m}^{a_2 a_3 \cdots a_m} (\xi_1) \, d\xi_1 \right. \\
& + \sum_{i=2}^{m} (b_2 - x_2) \cdots (b_{i-1} - x_{i-1})(a_i - x_i)(b_{i+1} - x_{i+1}) \cdots \\
& (b_m - x_m) \int_{a_1}^{b_1} G(x_1, \xi_1) f_{x_2 \cdots x_{i-1} x_i x_{i+1} \cdots x_m}^{a_2 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_m} (\xi_1) \, d\xi_1 \\
& \left. + \cdots + \prod_{i=2}^{m} (x_i - a_i) \int_{a_1}^{b_1} G(x_1, \xi_1) f_{x_2 x_3 \cdots x_m}^{b_2 b_3 \cdots b_m} (\xi_1) \, d\xi_1 \right\} \\
& + \cdots + \sum_{(x_1, x_2, \cdots, x_m)} \left\{ (b_1 - x_1) \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_m}^{b_m} G(x_2, \xi_2) \cdots G(x_m, \xi_m) \right. \\
& \times f_{x_1}^{a_1} (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_m) \, d\xi_2 \, d\xi_3 \cdots d\xi_m + (x_1 - a_1) \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_m}^{b_m} G(x_2, \xi_2) \cdots \\
& G(x_m, \xi_m) f_{x_1}^{b_1} (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_m) \, d\xi_2 \, d\xi_3 \cdots d\xi_m + \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} G(x_1, \xi_1) \cdots \\
& \left. G(x_m, \xi_m) f''(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \cdots d\xi_m \right\},
\end{aligned}
$$

ove $G(x_i, \xi_i)$ *designa la funzione d'influenza* (di Green–Burkhardt)

$$G(x_i, \xi_i) \begin{cases} = \dfrac{(\xi_i - a_i)(x_i - b_i)}{b_i - a_i} & \text{per} \quad \xi_i \leq x_i, \\ = \dfrac{(x_i - a_i)(\xi_i - b_i)}{b_i - a_i} & \text{per} \quad \xi_i \geq x_i, \end{cases}$$

mentre con $f^{a_1 a_2 \cdots a_m}$, $f^{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_m}$ $(i = 1, 2, \cdots, m), \cdots, f^{b_1 b_2 \cdots b_m}$ *si sono denotati i valori della funzione* f *nei vertici dell'iperparallelepipedo, con* $f^{a_2 a_3 \cdots a_m}_{x_2 x_3 \cdots x_m}(x_1)$, $f^{a_2 a_3 \cdots a_{i-1} b_i a_{i+1} \cdots a_m}_{x_2 x_3 \cdots x_{i-1} x_i x_{i+1} \cdots x_m}(x_1)$ $(i = 1, 2, \cdots, m), \cdots, f^{b_2 b_3 \cdots b_m}_{x_2 x_3 \cdots x_m}(x_1)$ *i valori della derivata seconda totale rispettivamente sulle* 2^{m-1} «*rette*» $x_2 = a_2, \cdots, x_m = a_m$; $x_2 = a_2, \cdots, x_{m-1} = a_{m-1}, x_m = b_m$; $\cdots$; $x_2 = b_2, x_3 = b_3, \cdots, x_m = b_m, \cdots$; *con* $f^{a_1}_{x_1}(x_2, x_3, \cdots, x_m)$, $f^{b_1}_{x_1}(x_2, x_3, \cdots, x_m)$ *designeremo le derivate seconde totali delle due funzioni di* $x_2, x_3, \cdots, x_m$ *alle quali la* f *si riduce sulle due facce di* P, *rispettivamente di equazioni* $x_1 = a_1$, $x_1 = b_1, \cdots$; *con* f'' *si è notata la derivata seconda totale di* f *nell'interno di* P *e i termini delle sommatorie si ottengono, da quelle descritte, operandovi le sostituzioni circolari* $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$.

2. In una serie di lavori anteriori propri [2]–[5], continuati anche da vari altri scienziati [6]–[12], abbiamo formulato per la prima volta e studiato applicandovi vari metodi problemi di analisi spettrale e variazionale, di programmazione dinamica e di disuguaglianze differenziali concernenti certe classi di equazioni funzionali lineari e non lineari, caratterizzati dalla presenza degli operatori alle derivate totali nel senso di Picone [13] almeno nei termini d'ordine superiore. Si è proseguito poscia allo studio di altre estensioni introducendo nei sistemi considerati anche i termini contenenti operatori ereditari ed argomenti ritardati [14]–[16].

In ciò che segue esporremo un algoritmo di costruzione delle funzioni di influenza (di Green) spettanti alla classe di problemi al contorno per le equazioni *polivibranti* (4), di cui il prototipo è dato dal sistema alle derivate totali

$$\frac{\partial^{2m} u(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m} - A(x_1, x_2, \cdots, x_m)\, u(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F(x_1, x_2, \cdots, x_m), \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(a_1, x_2, \cdots, x_m) = u(x_1, a_2, \cdots, x_m) = \cdots = u(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, a_m) = 0, \\ (u')_{x_1 = b_1} = (u')_{x_2 = b_2} = \cdots = (u')_{x_m = b_m} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$u' \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m} \quad , \qquad P\{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \cdots, m\}.$$

(4) Vari autori hanno chiamato le equazioni polivibranti «equazioni di Mangeron» [17]–[20]. Denominazione completamente adatta, utilizzata da noi di solito, è di «equazioni alle derivate totali nel senso di Picone».

Hanno luogo i seguenti teoremi [5].

TEOREMA II. *Nell'ipotesi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema* (2), (3), *tale soluzione può essere rappresentata sotto la forma*

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \tag{4}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} G(x_1, x_2, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) d\xi_1 \cdots d\xi_m,$$

ove $G(x_1, x_2, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ *è la funzione d'influenza* (di Green) *che soddisfa rispetto alle variabili* $x_1, x_2, \cdots, x_m$ *l'equazione omogenea*

$$G'' - AG = 0 \quad , \quad G'' = \frac{\partial^{2m} G(x_1, x_2, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \cdots \partial x_m^2}, \tag{5}$$

$$x_1 \neq \xi_1 \quad , \quad x_2 \neq \xi_2, \cdots, x_m \neq \xi_m$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} & G(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = 0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & G'(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

essendovi continua nel dominio iperparallelepipedico P, *allorché la sua derivata totale di primo ordine* G′ *subisce una discontinuità per* $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ *espressa dalla relazione che ne contiene* 2^m *termini e si ottiene per ricorrenza come segue.*

La relazione di discontinuità cui soddisfa la $G'(x_{m-1}, x_m; \xi_{m-1}, \xi_m)$ nel caso del problema bidimensionale è

$$\begin{aligned} & G'(\xi_{m-1}^-, \xi_m^-; \xi_{m-1}, \xi_m) + G'(\xi_{m-1}^+, \xi_m^+; \xi_{m-1}, \xi_m) \\ & - G'(\xi_{m-1}^+, \xi_m^-; \xi_{m-1}, \xi_m) - G'(\xi_{m-1}^-, \xi_m^+; \xi_{m-1}, \xi_m) = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Formiamo da ogni successione di *ambi* prelevata di cui sopra dai primi gruppi di variabili e cioè da ogni successione

$$+(\xi_{m-1}^-, \xi_m^-) \quad , \quad +(\xi_{m-1}^+, \xi_m^+) \quad , \quad -(\xi_{m-1}^+, \xi_m^-) \quad , \quad -(\xi_{m-1}^-, \xi_m^+)$$

due successioni di *terne* aggiungendovi nelle parentesi contenenti ognuno degli ambi, al primo posto, successivamente, ξ_{m-2}^- e poi ξ_{m-2}^+ e conservando i segni

(5) Sviluppi algoritmici e vari esempi di calcolo saranno pubblicati in una serie di Note sulle pagine del *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi*.

scritti davanti. Si ottengono le successioni di terne

$$(8)\qquad \begin{aligned} &+(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^-,\xi_m^-) \quad , \quad +(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^-,\xi_m^-)\,, \\ &+(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^+,\xi_m^+) \quad , \quad +(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^+,\xi_m^+)\,, \\ &-(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^+,\xi_m^-) \quad , \quad -(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^+,\xi_m^-)\,, \\ &-(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^-,\xi_m^+) \quad , \quad -(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^-,\xi_m^+) \end{aligned}$$

e quindi la relazione di variazione cui soddisfa la derivata totale prima della G, $G'(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m; \xi_{m-2}, \xi_{m-1}, \xi_m)$ nelle vicinanze del punto $x_{m-2} = \xi_{m-2}$, $x_{m-1} = \xi_{m-1}$, $x_m = \xi_m$:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &G'(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^-,\xi_m^-;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &+G'(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^-,\xi_m^-;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &+G'(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^+,\xi_m^+;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &+G'(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^+,\xi_m^+;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &-G'(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^+,\xi_m^-;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &-G'(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^+,\xi_m^-;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &-G'(\xi_{m-2}^-,\xi_{m-1}^-,\xi_m^+;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) \\ &-G'(\xi_{m-2}^+,\xi_{m-1}^-,\xi_m^+;\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) = -1 \end{aligned}$$

e così via, il segno del secondo membro essendovi dato dal $(-1)^i$.

TEOREMA III. *La funzione di influenza* (di Green) *corrispondente al problema* (2), (3) *può essere rappresentata tramite la formula*

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\Delta G(x_1, x_2, \cdots, x_m; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = \\ &(-1)^m h_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\cdots h_{i-1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\cdot \\ &h_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)\, h_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\cdots h_{2^m}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m), \end{aligned}$$

ove si è posto

$$(11)\qquad \begin{aligned} \Delta = \left(\prod_{i-1}^{2^{m-1}} - \prod_{i=2^{m-1}+1}^{2^m}\right) &h_i'(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\, h_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\cdots \\ &h_{i-1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\, h_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\cdots h_{2^m}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \end{aligned}$$

e ove le funzioni $h_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ *soddisfano nei domini parallelepipedici aperti che se ne deducono scrivendo, rispettivamente, per ogni* ξ_j^-, ξ_k^+ *figurante nell'espressione della* G' *situata al posto i della sua relazione di variazione, dedotta per ricorrenza con la regola di cui sopra dalla* (9), $a_j < x_j < \xi_j$,

$\xi_k < x_k < b_k$, *i seguenti sistemi polivibranti cristallizzati nei problemi ai limiti*

$$(12_1)\quad \begin{cases} h_1'' - \mathrm{A}h_1 = 0\,, \\ h_1(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 0\,, \\ h_1'(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 1\,; \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(12_{2^{m-1}})\quad \begin{cases} h_{2^{m-1}}'' - \mathrm{A}h_{2^{m-1}} = 0\,, \\ h_{2^{m-1}}(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 1\,, \\ h_{2^{m-1}}'(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 0\,; \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(12_{2^{m-1}+1})\quad \begin{cases} h_{2^{m-1}+1}'' - \mathrm{A}h_{2^{m-1}+1} = 0\,, \\ h_{2^{m-1}+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 0, & (i = 1, 2, \cdots, m-1) \\ h_{2^{m-1}+1}'(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) = 1, & (i = 1, 2, \cdots, m-1) \\ h_{2^{m-1}+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, b_m) = 1\,, \\ h_{2^{m-1}+1}'(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, b_m) = 0\,; \end{cases}$$

e così via.

Non insisteremo costì su certe proprietà di simmetria delle funzioni di Green. Proseguiremo con altre generalizzazioni in previsione di abbordare poi la programmazione dei calcoli tramite l'uso delle calcolatrici elettroniche.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica.* Conferenza tenuta il 12 maggio 1937 presso il Seminario Matematico dell'Università di Iași. Cfr. «Ann. Sci. Univ. Jassy», I sect., XXVI (1), 183–232 (1940).

[2] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno non lineare con caratteristiche reali multiple.* «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», ser. 6ª, XVI (*7–8*), 305–310 (1932).

[3] D. MANGERON, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* «Rend. Accad. sci. fis., mat., Napoli», ser. 4ª, II, 1–11 (1932); «Giorn. Mat.», ser. 3ª, *71*, 1–51 (1933).

[4] D. MANGERON, *Problèmes à la frontière pour certaines classes d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* «C.r. Acad. Sci., Paris», *204*, 94–96, 544–546, 1022–1024 (1937).

[5] D. MANGERON, *Sopra i problemi di Dirichlet per una classe di equazioni alle «derivate totali».* «Bul. Inst. politehn. Iași», s. n., III (VII), *3–4*, 49–52 (1957).

[6] A. ROSENBLATT, *Sur l'approximation des solutions de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* «C. r. Acad. sci., Paris», *198*, 1278–1280 (1933).

[7] G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* «Giorn. Mat.», ser. 4ª, *78*, 81–96 (1948–1949).

[8] F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova » XXIII, 163–213 (1954).

[9] L. POLI e P. DELERUE, *Le Calcul symbolique à deux variables.* Gauthier–Villars, Paris 1954.

[10] Yu. M. BEREZANSKI, *Sviluppo nelle serie di autofunzioni degli operatori autoconiugati* (in russo). « Naukova Dumka », Kiev 1965.

[11] T. AMANKULOV, *Risoluzione con approssimazione delle equazioni integro–differenziali di tipo neutro con argomento ritardato.* (in russo). Tesi di Laurea. Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1967.

[12] F. S. ROSSI, *Sul metodo di Mangeron concernente certi problemi non lineari alle derivate parziali.* « Bull. Inst. politehn. Iași », s. n. IX (XIII), 3–4, 55–60 (1963).

[13] M. PICONE, Annuario dell'Accad. Naz. dei XL, Roma 1961, 287–311.

[14] D. MANGERON, *Introduzione allo studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », s. 8ª, XXXIX, 1–2, 22–28.

[15] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *New methods of numerical calculation for the solutions of various integro–differential systems. I.* « Revue Roumaine sci. techn., s. Méc. Appl. », 9, 6, 1195–1221 (1964).

[16] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELİ, *Su alcuni problemi concernenti le equazioni integro–differenziali ordinarie con argomento ritardato.* I. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei » (in stampa).

[17] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* « Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa », s. 2ª. V, 51–72 (1936).

[18] T. KAMYTOV, *Risoluzione approssimativa dei problemi al contorno per alcune classi di equazioni non lineari integro–differenziali* (Tesi di laurea, in russo). Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1967.

[19] A. LOWAN, *On the Picone Treatment of Boundary–Value Problems for partial differential equations of various types.* « Bul. Inst. politehn. Iași », s. n., XI (XV), *3–4*, 19–21 (1965).

[20] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites « équations de Mangeron ».* « Bul. Inst. politehn. Iași », s. n., XI (XV), *1–2*, 25–30 (1965).