Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Yvonne Choquet-Bruhat

Construction de solutions radiatives approchées des équations d'Einstein

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.5, p. 649–652.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_649_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Fisica matematica. — *Construction de solutions radiatives approchées des équations d'Einstein.* Nota di YVONNE CHOQUET-BRUHAT, presentata (*) dal Corrisp. C. CATTANEO.

RIASSUNTO. — Mediante un'estensione del metodo W.K.B. si costruisce una soluzione radiativa approssimata delle equazioni di Einstein, somma di una metrica di base e di una perturbazione rapidamente oscillante.

1. DÉFINITIONS. – Nous nous proposons de construire une solution radiative, approchée, des équations d'Einstein sous la forme

$$g_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) = \overset{0}{g}_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{\omega} h_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) \tag{1}$$

où x désigne un point de l'espace temps V_4, φ une fonction numérique sur V_4 (la phase), ω un paramètre numérique réel (la fréquence), qui sera considéré comme l'infiniment grand principal des approximations. $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}(x)$ est une métrique hyperbolique normale sur V_4, quelconque a priori, dite métrique de base; $h_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi)$ est une perturbation rapidement oscillatoire de la métrique de base: $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}(x)$, $h_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi)$ et leurs dérivées partielles d'ordre ≤ 2 par rapport à leurs arguments x^λ et $\omega\varphi$ seront petites par rapport à ω. Par commodité on cherchera $h_{\alpha\beta}$ sous la forme:

$$h_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) = \overset{1}{g}_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi) + \frac{1}{\omega} \overset{2}{g}_{\alpha\beta}(x, \omega\varphi). \tag{2}$$

Nous dirons que (1) est une onde approchée d'ordre p pour les équations d'Einstein, dans une région D de V_4, s'il existe un nombre M indépendant de ω, tel que le tenseur de Ricci de la métrique (1) vérifie

$$|R_{\alpha\beta}| \leq M\omega^{-p} \quad \text{pour tout} \quad x \in D \quad \text{et tout } \omega. \tag{3}$$

2. ONDE APPROCHÉE D'ORDRE ZERO. – On déduit de (1), (2), sous l'hypothèse que $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ et $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}$ sont petits par rapport à ω, un développement en série convergente des éléments de la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ de $g_{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} = \overset{0}{g}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega} \overset{1}{g}{}^{\alpha\beta} + \cdots \tag{4}$$

où les $\overset{0}{g}{}^{\alpha\beta}$ sont les éléments de la matrice inverse de $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ et

$$\overset{1}{g}{}^{\alpha\beta} = -\overset{0}{g}{}^{\alpha\lambda} \overset{0}{g}{}^{\beta\mu} \overset{1}{g}_{\lambda\mu}. \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 20 aprile 1968.

Pour une fonction quelconque $f(x, \omega\varphi)$ on désigne par f' la dérivée par rapport à $\omega\varphi$ et $\partial_\alpha f$ la dérivée partielle par rapport à x^α (à $\omega\varphi$ constant); on a:

$$\frac{\partial f(x, \omega\varphi)}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha f(x, \omega\varphi) + f'(x, \omega\varphi)\, n_\alpha$$

ayant posé $n_\alpha \equiv \partial_\alpha \varphi$;

On trouve pour développement des coefficients de connexion:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \overset{0}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{1}{\omega}\overset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \cdots$$

avec $\overset{0}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{1}{g}{}'_{\beta\mu}\, n_\alpha + \overset{1}{g}{}'_{\alpha\mu}\, n_\beta - \overset{1}{g}{}'_{\alpha\beta}\, n_\mu\right)$ où $\overline{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta}$ est la connexion de la métrique de base; puis le développement du tenseur de Ricci:

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta} = \omega\overset{-1}{\mathrm{R}}_{\alpha\beta} + \overset{0}{\mathrm{R}}_{\alpha\beta} + \cdots \tag{6}$$

Pour que (1) soit solution approchée d'ordre zéro il faut que

$$\overset{-1}{\mathrm{R}}_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{7}$$

On constate que $\overset{-1}{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ s'écrit:

$$\overset{-1}{\mathrm{R}}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\left(\overset{1}{g}{}''_{\alpha\mu}\, n_\beta\, n_\lambda + \overset{1}{g}{}''_{\beta\mu}\, n_\alpha\, n_\lambda - \overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu}\, n_\alpha\, n_\beta - \overset{1}{g}{}''_{\alpha\beta}\, n_\lambda\, n_\mu\right). \tag{8}$$

Les équations (7) sont 10 équations linéaires homogènes pour les $\overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu}$, non indépendantes (leur déterminant est identiquement nul). On doit distinguer deux cas:

1) $\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, n_\lambda\, n_\mu \neq 0$; la solution générale de (7) est:

$$\overset{1}{g}{}''_{\lambda\mu} = \psi_\lambda\, n_\mu + \psi_\mu\, n_\lambda \tag{9}$$

où ψ_λ est un vecteur arbitraire.

Une perturbation de la forme (9) peut être annulée par un changement de coordonnées oscillatoire conservant la métrique de base, donc est dépourvue de signification physique.

2) Le seul cas intéressant physiquement sera

$$\overset{0}{g}{}^{\lambda\mu}\, n_\lambda\, n_\mu = 0 \tag{10}$$

c'est à dire $\varphi = c^{te}$ front d'onde de la métrique de base. Les équations (7) sont alors équivalentes à quatre conditions qui s'écrivent en coordonnées radiatives [1] (où on choisit $x^0 = \varphi$)

$$\overset{-1}{\mathrm{R}}_{0i} \equiv \frac{1}{2}\, n^j \overset{1}{g}{}''_{ij} = 0 \quad , \quad \overset{-1}{\mathrm{R}}_{00} \equiv -\frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{ij}\overset{1}{g}{}''_{ij} = 0 \tag{11}$$

les équations $\overset{-1}{\mathrm{R}}_{ij} = 0$ étant identiquement vérifiées.

(1) Les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, les indices latins 1, 2, 3.

Les $\overset{1}{g}_{ij}$ apparaissent seuls dans (11); ils sont d'ailleurs la partie significative, au premier ordre, de la perturbation, les $\overset{1}{g}_{0\alpha}$ prenant des valeurs arbitraires par un changement de coordonnées oscillatoire.

On montre que (11) exprime que les conditions d'harmonicité sont, au premier ordre, les mêmes pour la métrique de base et la métrique perturbée.

3. ONDE APPROCHÉE D'ORDRE 1. – Elle doit vérifier (11) et

$$\overset{0}{R}_{\alpha\beta} = 0 . \tag{12}$$

On trouve, pour la métrique (1), (2) que les quantités $\overset{0}{R}_{ij}$ dépendent uniquement des $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ et $\overset{1}{g}_{ij}$ (en coordonnées radiatives). Compte tenu de (11) elles prennent la forme remarquablement simple:

$$\overset{0}{R}_{ij} \equiv - n^h \tilde{\nabla}_h \overset{1}{g}{}'_{ij} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}'_{ij} \overline{\nabla}_\lambda n^\lambda + \overline{R}_{ij} = 0 \tag{13}$$

où $\overline{\nabla}_\lambda$ et $\overline{R}_{ij}$ sont la dérivation covariante et le tenseur de Ricci de la métrique de base et $\tilde{\nabla}_h$ est à rapprocher de la dérivation transverse de Cattaneo [6], mais pour une direction isotrope.

On montre que si la métrique de base vérifie

$$\overset{0}{g}{}^{ij} \overline{R}_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad n^j \overline{R}_{ij} = 0 , \tag{14}$$

les équations (13) entraînent que (11) est vérifié s'il l'est sur une sous varieté initiale transverse aux rayons.

Les équations restantes $\overset{0}{R}_{0\alpha} = 0$ peuvent toujours être satisfaites par choix des termes du second ordre $\overset{2}{g}{}''_{ij}$.

4. PERTE D'ÉNERGIE PAR RADIATION GRAVITATIONNELLE. – Une solution de (7), (12) sera effectivement une onde approchée d'ordre 1 si $\overset{1}{g}_{\alpha\beta}$ et $\overset{2}{g}_{\alpha\beta}$ sont bornés, ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre ≤ 2, quelque soit ω. On montre que cette condition ne pourra être réalisée que si, en coordonnées radiatives

$$\overline{R}_{ij} = 0 \quad , \quad \overline{R}_{0i} = 0 \tag{15}$$

c'est à dire $\overline{R}_{\alpha\beta}$ de la forme considèrée habituellement comme correspondant à une radiation électromagnétique pure (2)

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta . \tag{16}$$

Enfin on trouve que, en considèrant $\overset{0}{R}_{00}$ qui est:

$$\overset{0}{R}_{00} \equiv - \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{ij} \overset{2}{g}{}''_{ij} - \frac{1}{4} \left(\overset{1}{g}{}^{ij} \overset{1}{g}_{ij} \right)'' + \frac{1}{4} \overset{1}{g}{}'^{ij} \overset{1}{g}{}'_{ij} + \overline{R}_{00} = 0 ,$$

(2) Cfr. Lichnerowicz [7]. Remarquons que (15) entraîne (14).

on doit avoir, si $\overset{2}{g}_{ij}$ et $\overset{1}{g}_{ij}$ sont bornés:

$$\overline{R}_{00} > 0$$

puisque $\overline{R}_{00}$ est indépendant de ω et que

$$\overset{1}{g}'^{ij} \overset{1}{g}'_{ij} \leq 0 .$$

Donc, τ étant le scalaire dans (16) définissant l'énergie rayonnée,

$$\tau > 0 .$$

5. Metrique de base a symétrie sphérique. – Appliquons les résultats précédents à la métrique de Vaidya:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\,m(u)}{r^2}\right) du^2 + 2\, du\, dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)$$

qui vérifie (3) (on pose $x^0 = u$)

$$\overline{R}_{00} = - \frac{2}{r^2} \frac{dm}{du} \quad , \quad \overline{R}_{0\alpha} = 0 .$$

Pour qu'il en existe une perturbation oscillatoire (qui ne sera pas à symétrie sphérique) il faudra que

$$\frac{dm}{du} < 0 .$$

Un exemple de solution est (termes d'ordre 1)

$$\overset{1}{g}_{i1} = 0 \quad , \quad \overset{1}{g}_{33} = - \overset{1}{g}_{22} \sin^2\theta$$

$$\overset{1}{g}_{22} = r\alpha(u) \cos(\omega u) \quad , \quad \overset{1}{g}_{23} = r\alpha(u) \sin(\omega u) \sin\theta , \qquad \alpha(u) = 2\sqrt{-\frac{dm}{du}} .$$

Bibliographie.

[1] Y. Choquet-Bruhat, « C. R. Acad. Sc. », t. 258 (1964).
[2] J. Leray, « Cahiers de physique », t. 15 (1961).
[3] J. A. Wheeler, « Geometrodynamics », Academic Press 1962.
[4] D. R. Brill et J. B. Hartle, « Phys. Rev. », *135* B, 271 (1964).
[5] R. A. Isaacson, *Thèse*, University of Maryland 1967.
[6] C. Cattaneo, « Ann. di Mat. pur. e Appl. », t. 48 (1959).
[7] A. Lichnerowicz, « Ann. di Mat. pur. e Appl. », t. 50 (1960).

(3) Cfr. Isaacson [5].