Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Mehmet Namik Oğuztöreli

# Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **44** (1968), n.5, p. 643–648.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_643_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

**Teoria dei controlli ottimi.** — *Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi.* Nota I di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — An abstract optimal control problem is formulated and related functional equations are discussed.

## § 1. – FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DEI CONTROLLI OTTIMI.

Impostiamo il problema dei controlli ottimi in modo seguente. Sia B uno spazio di Banach di funzioni continue $v = v(t)$ definite per $t \geq 0$ e sia V un suo subspazio. Sia $u \equiv u(t) \equiv u(t\,;v)$ una funzione ordinaria di $t$ per $t \geq 0$ ed un funzionale di $v$ per $v \in \mathrm{V}$. Sia

$$\mathrm{U} = \{u(t\,;v) \mid t \geq 0 \;,\; v \in \mathrm{V}\} . \tag{1.1}$$

Introduciamo una norma conveniente nello spazio U. Assumiamo che

**H$_1$**) La $u(t\,;v)$ è continuamente derivabile rispetto a $t \in \mathrm{I}_0$ per ogni $v \in \mathrm{V}$ fissato e fortemente derivabile rispetto a $v \in \mathrm{V}$ per ogni $t \in \mathrm{I}_0$ fissato, essendo $\mathrm{I}_0 = [0, \gamma]$ un intervallo compatto dato.

Una forma possibile per la $u(t\,;v)$ è la seguente:

$$\begin{aligned} u(t\,;v) = {} & \varphi(t) + \int_0^t \mathrm{K}_1(t\,;\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^t \mathrm{K}_2(t\,;\sigma_1, \sigma_2)\, v(\sigma_1)\, v(\sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \\ & + \cdots \\ & + \frac{\lambda^n}{(n+1)!} \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \mathrm{K}_{n+1}(t\,;\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1})\, v(\sigma_1) \cdots v(\sigma_{n+1})\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n+1} \\ & + \cdots , \end{aligned} \tag{1.2}$$

ove $\varphi(t)$ è una funzione nota continuamente derivabile rispetto a $t$ per $t \geq 0$, $\mathrm{K}_j(t\,;\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ sono continuamente derivabili rispetto a $t$ per $t \geq 0$, continue e simmetriche rispetto a $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_j$ per $0 \leq \sigma_i \leq t$ $(i = 1, 2, \cdots, j)$ e la serie funzionale di potenze del secondo membro è supposta uniformemente convergente per $t \in \mathrm{I}_0$, per ogni $v \in \mathrm{V}$ e per $|\lambda| < \mathrm{R}$, essendo R una costante positiva [2]–[9].

(*) Department of Mathematics, The University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
(**) Presentata nella seduta dell'11 maggio 1968.

Sia $\mathfrak{I}$ l'insieme di tutti gli intervalli $I = [\alpha, \beta]$ contenuti nell'intervallo $I_0$. Sia

$$\text{(I.3)} \qquad F_I(u, v) = F(u(t), v(t), t \in I)$$

un funzionale dato *non negativo* definito sullo spazio $U \times V \times \mathfrak{I}$. Assumiamo che

**H**2) Il funzionale $F_I(u, v)$ è fortemente differenziabile rispetto a $u \in U$ e rispetto a $v \in V$ per ogni dato $I \in \mathfrak{I}$;

**H**3) Se $I_1 = [a, b] \in \mathfrak{I}$, $I_2 = [c, d] \in \mathfrak{I}$ e se ogni intersezione $I_1 \cap I_2$ è vuota oppure $a = d$, ovvero $b = c$, allora

$$\text{(I.4)} \qquad F_{I_1 \cup I_2}(u, v) = F_{I_1}(u, v) + F_{I_2}(u, v);$$

**H**4) Il funzionale $F_I(u, v)$ è continuo in I, e cioè abbiamo

$$\text{(I.5)} \qquad \lim_{I \to \tilde{I}} F_I(u, v) = F_{\tilde{I}}(u, v), \qquad I, \tilde{I} \in \mathfrak{I};$$

**H**5) Se $J_\alpha = [\alpha, \beta] \in \mathfrak{I}$, è assicurata la validità dell'eguaglianza

$$\text{(I.6)} \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} F_{J_\alpha}(u, v) = \lim_{\beta \to \alpha} \frac{F_{J_\alpha}(u, v)}{\beta - \alpha}$$

e la derivata che figura nel primo membro è fortemente differenziabile rispetto ad $u \in U$ e a $v \in V$.

Ad esempio, il funzionale

$$\text{(I.7)} \qquad F_I(u, v) = \int_\alpha^\beta Q(u(t), v(t))\, dt \qquad (I = [\alpha, \beta]),$$

ove $Q(u, v)$ è una funzione non negativa, continuamente differenziabile rispetto ad $u$ e $v$, soddisfa le assunzioni **H**2–**H**5.

In ciò che segue ci occuperemo del seguente

Problema di ottimizzazione. – Supposte soddisfatte le ipotesi di cui sopra, si chiede di determinare una funzione $v^0 \in V$ per la quale il funzionale $F_{I_0}(u, v)$ assume il suo minimo, cioè

$$\text{(I.8)} \qquad F_{I_0}(u^0, v^0) = \min_{v \in V} F_{I_0}(u, v),$$

ove $u$ e $u^0$ denotano rispettivamente $u \equiv u(t; v)$ e $u^0 \equiv u(t; v^0)$.

Ogni funzione $v^0 \in V$ per la quale è valida l'equazione (I.8) sarà chiamata un *controllo ottimo*. L'esistenza del controllo ottimo può essere dimostrata sotto condizioni molto generali spettanti all'insieme V ed al funzionale $F_I(u, v)$. Nella presente Nota ci limitiamo a stabilire soltanto le condizioni necessarie di ottimalità per una (controllo) $v \in V$. Tali condizioni ci conducono a certe equazioni funzionali di particolare importanza nella teoria dei controlli ottimi.

## § II. – EQUAZIONI FUNZIONALI GENERALIZZATE DI BELLMAN.

L'operazione di minimizzazione rispetto a $v \in V$ si eseguisce nella (I.8) nell'intervallo $I_0 = [0, \gamma]$. Ciò che si mette in evidenza scrivendo

$$f(0, \gamma) = \min_{v \in V} F_{I_0}(u, v). \tag{II.1}$$

Più generalmente, sia $\tau$ un punto qualunque in $I_0$. Poniamo $I_\tau = [\tau, \gamma]$ ed introduciamo la funzione

$$f(\tau, \gamma) = \min_{v \in V} F_{I_\tau}(u, v). \tag{II.2}$$

È chiaro che, per le ipotesi $H_4$–$H_5$, si ha

$$f(\gamma, \gamma) = 0. \tag{II.3}$$

Dividiamo l'intervallo $I_\tau$ in due parti e precisamente $I''_\tau = [\tau, \tau + \Delta]$ e $I_{\tau+\Delta} = [\tau + \Delta, \gamma]$, ove $\Delta$ è un piccolo intervallo finito spettante alla variabile $t$. L'ipotesi $H_3$ ci conduce all'eguaglianza

$$F_{I_\tau}(u, v) = F_{I''_\tau}(u, v) + F_{I_{\tau+\Delta}}(u, v). \tag{II.4}$$

Enunciamo ora il seguente principio dovuto a R. Bellman [1], il quale esprime la proprietà fondamentale delle linee di ottime condotte.

PRINCIPIO DI OTTIMALITÀ. – *Una linea di ottima condotta possiede la proprietà che, qualunque siano lo stato iniziale e la decisione iniziale, le decisioni rimanenti debbono costituire pur esse una linea di ottima condotta rispetto allo stato risultato dopo l'esecuzione della prima decisione.*

E dunque, in base al principio di ottimalità, le equazioni (II.2) e (II.4) conducono all'eguaglianza

$$f(\tau, \gamma) = f(\tau + \Delta, \gamma) + \min_{v \in V} F_{I''_\tau}(u, v). \tag{II.5}$$

Portando la $f(\tau + \Delta, \gamma)$ nel primo membro, dividendo con $\Delta$ e passando al limite per $\Delta \to 0$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau, \gamma) = -\min_{v \in V} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v) \right\}. \tag{II.6}$$

Dalla (II.6), tenendo conto della definizione (II.2), segue, per $\tau \in I_0$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \min_{v \in V} F_{I_\tau}(u, v) \right\} = -\min_{v \in V} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} F(u, v) \right\}. \tag{II.7}$$

Integriamo adesso rispetto a $\tau$ nell'intervallo $I_0$ ambo i membri dell'equazione (II.7). Tenendo conto delle equazioni (I.8) e (II.3), si trova

$$\text{(II.8)} \qquad F_{I_0}(u^0, v^0) = \min_{v \in V} F_{I_0}(u, v) = \int_0^{\gamma} \left( \min_{v \in V} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v) \right\} \right) d\tau .$$

E pertanto, *controlli ottimi si trovano tra i controlli* $v \in V$ *per i quali il funzionale* $\frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v)$ *assume, per ogni* $\tau \in I_0$, *il suo minimo.*

È degno di nota il fatto che *per un controllo ottimale le operazioni* $\frac{\partial}{\partial \tau}$ *e* $\min_{v \in V}$ *sono, per ogni* $\tau \in I_0$, *anticommutative rispetto al funzionale* $F_{I_\tau}(u, v)$. *Ciò è espresso dall'equazione* (II.7). È chiaro che tali due operazioni non sono in generale né commutative, né anticommutative. Osserviamo pure che l'equazione (II.6) costituisce un'estensione della nota equazione funzionale di R. Bellman [1].

## § III. – Condizioni necessarie di ottimalità.

Sia $v \in V$ un punto estremale per il funzionale $\frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v)$. Poiché la prima variazione di un funzionale dato si annulla in un punto estremale di esso funzionale, si ha, per $\tau \in I_0$,

$$\text{(III.1)} \qquad \delta_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v) \right\} = 0 ,$$

ove $\delta_v\{\cdot\}$ denota la prima variazione rispetto a $v$ del funzionale $\{\cdot\}$.

È chiaro che l'equazione funzionale di cui sopra costituisce una *condizione necessaria di ottimalità* per un controllo $v \in V$ nell'ambito del nostro problema di ottimizzazione formulato nel § I. Si può quindi enunciare il seguente risultato.

*Ottimi controlli sono da ricercarsi tra le soluzioni dell'equazione funzionale* (III.1), *purché tale equazione sia risolubile.*

## § IV. – Caso particolare.

Consideriamo adesso il caso in cui $u(t; v)$ e $F_I(u, v)$ sono definiti tramite rispettivamente le equazioni (I.2) e (I.7). Tenendo conto dell'equazione (I.7) si ha innanzitutto, per $\tau \in I_0$,

$$\text{(IV.1)} \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} F_I(u, v) = Q(u(\tau), v(\tau)) .$$

Si ha poscia per ogni continuo incremento $\delta v(t)$ della $v(t)$, tale che sia sempre $v(t) + \delta v(t) \in V$, vista l'equazione (I.2),

$$\text{(IV.2)} \qquad \delta_v u(\tau) = \int_0^{\tau} K(\tau, \sigma; v)\, \delta v(\sigma)\, d\sigma ,$$

ove

$$\text{(IV.3)} \qquad K(\tau, \sigma; v) = K_1(\tau, \sigma) + \lambda \int_0^\tau K_2(\tau; \sigma_1, \sigma)\, v(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \cdots$$

$$+ \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^\tau \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau K_{n+1}(\tau; \sigma_1, \cdots, \sigma_n, \sigma)\, v(\sigma_1) \cdots v(\sigma_n)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_n + \cdots,$$

per $\tau \in I_0$. Dalla (IV.1) se ne deduce

$$\text{(IV.4)} \qquad \delta_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} F_{I_\tau}(u, v) \right\} = \frac{\partial Q}{\partial u}\, \delta_v\, u(\tau) + \frac{\partial Q}{\partial v}\, \delta v(\tau),$$

ove $\dfrac{\partial Q}{\partial u} = \dfrac{\partial Q(u(\tau), v(\tau))}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial v} = \dfrac{\partial Q(u(\tau), v(\tau))}{\partial v}$.

L'equazione (III.1) ha la forma seguente

$$\text{(IV.5)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial u}\, \delta_v\, u(\tau) + \frac{\partial Q}{\partial v}\, \delta v(\tau) = 0, \qquad \text{per} \quad \tau \in I_0.$$

Siccome, per un punto estremale $v = v(t)$ del funzionale $Q(u(\tau), v(\tau))$, l'equazione (IV.5) è soddisfatta per ogni continua ed arbitraria $\delta v(t)$, ciò che implica le seguenti eguaglianze:

$$\text{(IV.6)} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial Q}{\partial u} = 0, \ \text{oppure} \ \delta_v u(\tau) = 0, \ \text{ovvero ambedue, per} \ \tau \in I_0.$$

Si deve notare che per una arbitraria variazione $\delta v(\tau)$ risulta $\delta_v\, u(\tau) = 0$ allora ed allora soltanto che risulti

$$\text{(IV.7)} \qquad K(\tau, \sigma; v) = 0 \qquad \text{per} \quad \sigma \in I'_\tau, \ \tau \in I_0, \ v \in V.$$

In questo caso, vista l'equazione (IV.3), perveniamo, per $\tau \in I_0$, $\sigma \in I'_\tau$ all'equazione di Volterra di prima specie. Differenziando ambo i membri di tale equazione rispetto a $\tau$ si ottiene un'equazione funzionale di seconda specie il cui studio non presenta difficoltà.

## § V. – OSSERVAZIONI.

1. Le condizioni incluse nelle ipotesi $\mathbf{H}_1$–$\mathbf{H}_5$ possono essere indebolite. Questo però non costituiva nostra preoccupazione nella presente Nota.

2. Nella serie di note successive esporremo la teoria dei controlli ottimi spettante soprattutto ai vari problemi da noi studiati in collaborazione col prof. D. Mangeron in questi *Rendiconti* concernenti le equazioni polivibranti, caratterizzati dalla presenza dell'operatore di derivata totale nel senso di Picone [10].

## BIBLIOGRAFIA.

[1] R. BELLMAN, a. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957. b. *Adaptive Control Process: A Guided Tour*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961.

[2] P. LEVY, *Problèmes concrets d'Analyse Fonctionnelle*. Gauthier–Villars, Paris, 1951.

[3] A. M. LIAPUNOV, *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation*. Première partie. *Etude général du problème*, «Zap. Akad. Nauk. St. Petersbourg», 1–225 (1906).

[4] L. LICHTENSTEIN, *Vorlesungen über einige Klassen nichlinearer Integralgleichungen und Integro–Differentialgleichungen*. Berlin, Springer, 1931.

[5] M. N. OĞUZTÖRELİ, a. *Time-Lag Control Systems*, Academic Press, 1966, New York, London.
b. *Optimization in Distributed Parameters Control Systems. A Dynamic Programming Approach*. A publication of the Department of Mathematics, University of Alberta, 1968.

[6] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 2ª ed., 1946.

[7] E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, III. Teil «Math. Ann.», *65*, 370–399 (1908).

[8] M. M. VAINBERG, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*. Holden–Day, San Francisco, London and Amsterdam, 1964.

[9] V. VOLTERRA, *Theory of Functional and Integral and Integro–Differential Equations*, Dover, New York, 1959.

[10] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, «Ann. Sci. Univ. Jassy», I–e Sect., XXVI, I, 183–232 (1940).