Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tudor Zamfirescu

Sur les familles continues de courbes. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.5, p. 639–642.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_639_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes*. Nota III di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa Nota, dedicata anch'essa alle famiglie continue secondo Grünbaum di curve, sono indicati alcuni teoremi sulle curve descritte da punti che appartengano agli elementi di una tal famiglia, dipendendone con continuità.

Dans les premières deux parties [4] et [5] du travail, nous avons continué l'étude commencée par Grünbaum [1] sur la distribution des points multiples d'une famille continue de courbes. Ici nous allons établir quelques résultats concernant les courbes décrites par des points se mouvant continûment sur les courbes de la famille.

Rappelons qu'on appelle *famille continue de courbes* tout ensemble $\mathfrak{L}$ dont les éléments sont des arcs de Jordan ouverts, tel que:

1) Chaque courbe de $\mathfrak{L}$ est incluse (exceptant les extrémités) dans la composante bornée D du complémentaire d'une courbe de Jordan fermée C, ses extrémités appartenant à C.

2) Chaque point $p \in C$ est l'extrémité d'une courbe $L(p) \in \mathfrak{L}$ et d'une seule.

3) Si $L(p_1)$ et $L(p_2)$ sont deux courbes différentes de $\mathfrak{L}$, alors $L(p_1) \cap L(p_2)$ est un seul point.

4) La courbe $L(p)$ dépend continûment de $p \in C$.

Notons que chaque courbe de la famille est traversée par toutes les autres.

Soit, en outre, $q(p)$ un point situé sur $L(p)$ et dépendant continûment de $p \in C$. Appelons

$$\Gamma = \{q(p) : p \in C\}$$

courbe fermée associée à $\mathfrak{L}$. Si q est un homéomorphisme, alors la courbe Γ est appelée *simple*; si $q(p) = q(-p)$ pour tout point $p \in C$, alors elle est appelée *double*.

Voici un exemple illustrant les notions ci–dessus:

Soient K un corps convexe plan, $\mathfrak{G}$ la famille des diamètres essentiels associés à K (voir Hammer [2]) et $\varepsilon(r)$ la courbe décrite par les points divisant chaque diamètre essentiel dans le rapport $(1-r)/r$ (voir [3]). Alors $\mathfrak{G}$ est une famille continue de courbes au sens de Grünbaum et $\varepsilon(r)$ est, pour chaque nombre $r \in [1/2, 1)$, une courbe fermée associée à $\mathfrak{G}$. Du théorème 7 de [3] on déduit facilement que $\varepsilon(r)$ est simple si et seulement si $r \geq r_i$, où r_i désigne le nombre de réductibilité de K (voir [3]). En même temps $\varepsilon(1/2)$ est un exemple de courbe fermée associée double.

(*) Nella seduta da 20 aprile 1968.

Revenons au cas général: considérons de nouveau la famille continue de courbes quelconque $\mathfrak{L}$ et revenons aux notations précédentes.

Rappelons que $M_n(\mathfrak{L})$ désigne l'ensemble des points de D par lesquels passent au moins n courbes de $\mathfrak{L}$. Dès maintenant U désignera la réunion des composantes bornées du complémentaire de Γ. Evidemment $U \subset D$. Si $M_2(\mathfrak{L}) \subset U$, alors nous dirons que la courbe Γ est *à sens fortement direct*. Si $M_2(\mathfrak{L}) \subset U \cup \Gamma$, alors Γ sera *à sens direct*. C'est une généralisation de la définition donnée dans [3] pour $\varepsilon(r)$. En effet, si $\varepsilon(r)$ est à sens direct selon la définition de [3], alors $r \geq r_i$ en vertu du théorème 8 de [3], donc $\varepsilon(r) = B(r)$ selon le théorème 7 de [3]; puisque les diamètres essentiels du corps convexe donné contiennent ceux du corps convexe $C(r)$ borné par $B(r)$ (voir [2]) il s'ensuit que $M_2(\mathfrak{S}) \subset C(r)$. Evidemment, le sens fortement direct implique le sens direct.

Si le sous-ensemble E de D se trouve dans le complémentaire d'une des composantes de $D - L(p)$, où $L(p) \in \mathfrak{L}$, alors, par définition, $L(p)$ est une *courbe d'appui de* E.

On dit que l'ensemble E inclus dans D est $\mathfrak{L}$–convexe si toutes les intersections de E avec les courbes de $\mathfrak{L}$ sont connexes (Grünbaum [1]). Notons qu'un ensemble $\mathfrak{L}$–convexe n'est pas nécessairement connexe. Nous appellerons aussi *$\mathfrak{L}$–convexe* (par abus) toute courbe fermée telle que le complémentaire de la composante non bornée de son complémentaire soit *$\mathfrak{L}$–convexe*. Une courbe fermée dont la réunion des composantes bornées du complémentaire est $\mathfrak{L}$–convexe sera appelée *fortement $\mathfrak{L}$–convexe*. On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire qu'une courbe fortement $\mathfrak{L}$–convexe soit aussi $\mathfrak{L}$–convexe, ou réciproquement. Aussi, il n'est pas nécessaire qu'une courbe $\mathfrak{L}$–convexe, ou bien fortement $\mathfrak{L}$–convexe, soit homéomorphe à un cercle. Nous pouvons préciser l'aspect des courbes fermées fortement $\mathfrak{L}$–convexes Γ associées à $\mathfrak{L}$ dans l'hypothèse suivante:

(α) *L'ensemble*

$$\{p \in C : \operatorname{card} q^{-1}(q(p)) \geq 2\}$$

est rare dans C, *l'ensemble* $L(p) - \Gamma$ *est dense sur toute courbe* $L(p) \in \mathfrak{L}$ *et il n'y a aucun arc* $V \subset C$ *tel que* $L(p)$ *soit une courbe d'appui de* $q(V) = \{q(p) : p \in V\}$ *pour tout* $p \in V$.

On remarque tout de suite que, dans la condition (α), la courbe Γ n'est pas double.

THÉORÈME 1. *Supposons que la courbe fermée* Γ *associée à* $\mathfrak{L}$ *satisfait à la condition* (α); *alors, si* Γ *est fortement* $\mathfrak{L}$*–convexe, elle est simple.*

La démonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici à cause de sa longueur; elle fera seule l'objet d'une autre note qui paraîtra prochaînement.

THÉORÈME 2. *Supposons, de nouveau, que la courbe fermée* Γ *associée à* $\mathfrak{L}$ *satisfait à la condition* (α)*; alors, si* Γ *est simultanément* $\mathfrak{L}$*–convexe et fortement* $\mathfrak{L}$*–convexe, elle est à sens fortement direct* (*donc également simple* (1) *et à sens direct*).

(1) Voir le théorème 3.

Démonstration. En effet, du théorème 1 il s'ensuit que Γ est simple. Soient $p_1, p_2 \in C$, $p_1 \neq p_2$. Les points $q(p_1), q(p_2), q(-p_1)$ et $q(-p_2)$ se trouvent, dans cet ordre, sur Γ. Puisque Γ est $\mathfrak{L}$–convexe, les arcs $q(p_i)\,q(-p_i)$ de $L(p_i)$ $(i = 1, 2)$ sont inclus dans $U \cup \Gamma$. Notons $\{z\} = L(p_1) \cap L(p_2)$. On a

$$L(p_2) \cap \Gamma = \{q(p_2), q(-p_2)\}.$$

En effet, s'il existait un point $w \in \operatorname{int} q(p_2)\,q(-p_2) \cap \Gamma$, alors $q(p_2)\,w \not\subset \Gamma$ et $wq(-p_2) \not\subset \Gamma$ selon la condition (α); donc w serait situé sur $L(p_2)$ entre deux points de U, ce qui contredit l'$\mathfrak{L}$–convexité forte de Γ. S'il existait un point $w' \in L(p_2) \cap \Gamma - q(p_2)\,q(-p_2)$, alors on aurait soit $q(p_2) \in w'\,q(-p_2)$, soit $q(-p_2) \in w'\,q(p_2)$; dans le premier cas $q(p_2)\,w' \not\subset \Gamma$, dans le deuxième, $q(-p_2)\,w' \not\subset \Gamma$ et dans tous les deux $q(p_2)\,q(-p_2) \not\subset \Gamma$, d'où soit $q(p_2)$, soit $q(-p_2)$ serait situé sur $L(p_2)$ entre deux points de U, en contredisant l'$\mathfrak{L}$–convexité forte de Γ. De nouveau en vertu de la condition (α), si V et W sont deux voisinages, respectivement de $q(p_1)$ et de $q(-p_1)$, tels que

$$V \cap L(p_2) = \varnothing \quad \text{et} \quad W \cap L(p_2) = \varnothing,$$

alors il y a deux points $u, v \in q(p_1)\,q(-p_1)$, tels que

$$u \in V - \Gamma \quad \text{et} \quad v \in W - \Gamma.$$

On a $z \in uv$. En tenant compte que $u, v \in U$ et que Γ est fortement $\mathfrak{L}$–convexe, il résulte que $uv \subset U$, donc $z \in U$. Par conséquent, Γ est à sens fortement direct.

Voici maintenant une autre condition suffisante pour que la courbe fermée Γ associée à $\mathfrak{L}$ soit simple. Dès maintenant la condition (α) ne sera plus demandée.

THÉORÈME 3. *Si la courbe Γ est à sens fortement direct, alors elle est simple.*

Démonstration. Supposons que $q(p_1) = q(p_2)$. Si $p_2 \neq \pm p_1$, alors le point $L(p_1) \cap L(p_2)$ appartiendrait à Γ, ce qui est absurde. Si $p_2 = -p_1$, soit s un point arbitraire de $L(p_1)$, différent de $q(p_1)$ et situé, par exemple, entre p_1 et $q(p_1)$. Si $s = q(p_3)$ où $p_3 \neq \pm p_1$, alors $L(p_1) \cap L(p_3)$ appartiendrait à Γ, ce qui contredit l'hypothèse. Si s était un point intérieur à U, alors il existerait un autre point t de Γ situé sur $L(p_1)$ entre p_1 et s; on retrouve la situation précédente à l'égard de t. Donc s est un point extérieur à U. Il s'ensuit que toute intersection de $L(p_1)$ avec une autre courbe $L(p) \in \mathfrak{L}$ est soit sur Γ (si $L(p)$ passe par $q(p_1)$), soit extérieure à U, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $p_2 = p_1$ et q est bijective.

L'aspect de la courbe Γ peut être encore précisé si elle est à sens fortement direct.

LEMME. *Si $\Gamma \cap M_2(\mathfrak{L}) = \varnothing$, alors Γ est fortement $\mathfrak{L}$–convexe.*

Supposons que Γ n'est pas fortement $\mathfrak{L}$–convexe. Il y a alors une courbe $L(p)$ telle que son intersection avec U ne soit pas connexe, c.–à–d. qu'il y a trois points $t, u, v \in L(p)$, l'ordre sur $L(p)$ étant $p, t, u, v, -p$, tels que $t, v \in U$, mais $u \notin U$.

On peut trouver trois points différents de Γ sur $L(p)$. En effet, il y a deux points $x, y \in \Gamma$ située sur $L(p)$ respectivement entre p et t, v et $-p$. En outre, soit u même, soit un autre point de $L(p)$ séparant u de v, appartient à Γ. Au plus deux de ces trois points sont $q(p)$ et $q(-p)$, donc le troisième (disons x) appartient à une courbe $L(p')$ différente de $L(p)$, d'où $x \in M_2(\mathfrak{L})$, ce qui contredit l'hypothèse.

Par conséquent, on a le

THÉORÈME 4. *Si* Γ *est à sens fortement direct, alors elle est fortement* $\mathfrak{L}$*–convexe.*

Naturellement, on peut maintenant se poser les questions suivantes:

I. Est–il vrai le suivant résultat (forme duale du théorème précédent): « Si Γ est à sens direct, alors elle est $\mathfrak{L}$–convexe »?

II. Est–ce qu'on peut établire la réciproque de la propriété selon laquelle toute courbe fermée associée, à sens fortement direct, est en même temps simple et fortement $\mathfrak{L}$–convexe?

La réponse à la deuxième question est négative, mais il est possible d'obtenir un tel résultat sous sa forme duale:

THÉORÈME 5. *Si* $\mathfrak{L}$ *est en même temps simple et* $\mathfrak{L}$*–convexe, alors elle est à sens direct.*

Démonstration. Soient $L(p_1)$ et $L(p_2)$ deux courbes de $\mathfrak{L}$. Puisque Γ est simple, $q(p_1), q(p_2), q(-p_1), q(-p_2)$ se trouvent dans cet ordre sur Γ. Comme Γ est $\mathfrak{L}$–convexe, les arcs γ_1 et γ_2 des points compris entre $q(p_1)$ et $q(-p_1)$ sur $L(p_1)$ et respectivement entre $q(p_2)$ et $q(-p_2)$ sur $L(p_2)$, se trouvent entièrement dans $U \cup \Gamma$. Alors $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \varnothing$, donc

$$L(p_1) \cap L(p_2) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \subset U \cup \Gamma .$$

Par conséquent, $M_2(\mathfrak{L}) \subset U \cup \Gamma$ et la démonstration est finie.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537 (1966).

[2] P. C. HAMMER, *Convex bodies associated with a convex body*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *2*, 781–793 (1951).

[3] T. ZAMFIRESCO, *Reducibility of convex bodies*, « Proc. London Math. Soc. » (3), *17*, 653–668 (1967).

[4] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes* (Note I), « Rend. Lincei », *42*, 771–774 (1967).

[5] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes* (Note II), « Rend. Lincei », *43*, 13–17 (1967).