Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luciano De Vito

Sulle ipotesi di un teorema d'esistenza per l'equazione integro—differenziale di tipo ellittico di Volterra

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.5, p. 633–638.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_633_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica. — *Sulle ipotesi di un teorema d'esistenza per l'equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra.* Nota di LUCIANO DE VITO, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

RÉSUMÉ. — On fera quelques observations sur la méthode de résolution du problème de Dirichlet pour l'equation intégro-différentielle de Volterra de type elliptique dans un ouvert « proprement régulier » selon Fichera, adoptée par l'auteur dans un travail précédent.

In [2] [1] è stato provato, tra l'altro, che, se A è un aperto *propriamente regolare* nel senso di Fichera [2], dello spazio cartesiano a tre dimensioni R^3 (il punto generico del quale si indica con $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$), e se T_0 è l'intervallo dell'asse reale t, definito da $0 \le t \le t_0$, il seguente problema di Dirichlet:

$$\Delta_x u(x,t) + \sum_{1}^{3}{}_i \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_i^2} f_i(t,\tau)\, d\tau = f(x,t), \qquad x \in A, \ t \in T_0, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \mathcal{F}A, \ t \in T_0, \tag{2}$$

ove Δ_x denota l'operatore di Laplace rispetto alle sole variabili x_1, x_2, x_3, $f(x,t)$ indica una funzione di quadrato sommabile in $A \times T_0$, e $f_i(t,\tau)$ sono funzioni continue in $T_0 \times T_0$, ammette una ed una sola soluzione nella classe $\mathcal{H}$ delle funzioni di quadrato sommabile in $A \times T_0$, dotate di derivate parziali prime, rispetto a x_1, x_2 e x_3, in senso debole, di quadrato sommabile in $A \times T_0$, aventi « traccia » nulla su $T_0 \times \mathcal{F}A$ nel senso che, per ogni $t \in T_0$, la funzione di $x : u(x,t)$ ha « traccia » nulla su $\mathcal{F}A$ [3]. Dicendo che una funzione $u(x,t)$ di $\mathcal{H}$ è soluzione di (1) (2) si intende che, per ogni $v \in \mathcal{H}$, riesce:

$$\sum_{1}^{3}{}_i \int_{A \times T_0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau,t)\, d\tau \right] dx\, dt = -\int_{A \times T_0} f(x,t)\, v(x,t)\, dx\, dt.$$

Tale risultato, annunciato in [1], è stato provato in [2], facendo ricorso ad un principio esistenziale di G. Fichera [4], dopo aver preventivamente

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1968.

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia.

(2) Cfr. [5] p. 207; per comodità del Lettore, richiameremo tra breve tale definizione.

(3) La nozione di « traccia » è qui intesa nel senso introdotto da G. Fichera nel 1949 in [4]; con riferimento ad aperti propriamente regolari, tale nozione coincide con quella di « traccia » ottenuta con il metodo del « completamento funzionale », cfr. nota [5].

(4) Cfr. [5] pag. 175.

dimostrato la seguente formula di maggiorazione:

$$(3)\qquad \int_{A\times T_0} |v(x,t)|^2\, dx\, dt \leq$$

$$\leq H \sum_{0}^{\infty}{}_k \int_{A\times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i}\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau,t)\, d\tau\right] dx\, dt \qquad v \in \mathcal{H},$$

ove $\{u_k\}$ è un sistema ortonormale e completo in $\mathcal{H}$ rispetto al prodotto scalare

$$(3')\qquad (u,v) = \int_{A\times T_0} \left[u(x,t)\, v(x,t) + \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}\right] dx\, dt\,;$$

la (3) può riguardarsi come una generalizzazione della classica diseguaglianza di Poincaré.

Nella recensione del lavoro [1], comparsa su *Mathematical Review*, vol. 25, 1963, pp. 452–453, E. Magenes ha osservato che il problema in questione poteva esser risolto, per via classica, senza far ricorso al citato principio esistenziale, « componendo la (1) con l'operatore Δ^{-1} e notando che $\Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è limitato nello spazio $H^2(A) \cap H_0^1(A)$ delle funzioni di quadrato sommabile in A con le derivate prime e seconde, e *nulle* su $\mathcal{F}A$ [5] ».

Scopo della presente Nota è di mostrare che, in effetti, il suggerimento del prof. Magenes, ancorché assai utile nel caso in cui A sia « sufficientemente regolare », non consente di ritrovare i risultati di cui a [1] e [2] nella generalità là ammessa per l'aperto A. Infatti, come si è dianzi accennato, i risultati annunciati in [1] e dimostrati in [2] sono relativi ad aperti A *propriamente regolari* nel senso di Fichera – quindi anche ad aperti che non abbiano necessariamente la frontiera di classe 1, come risulta dalla definizione di aperto *propriamente regolare*, che tra breve richiameremo – laddove la limitatezza dell'operatore $\Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ in $H^2(A) \cap H_0^1(A)$, in generale, vien meno quando la frontiera dell'aperto A non sia di classe 1. In effetti, ora mostreremo appunto che esistono degli aperti A di forma molto semplice – precisamente delle piramidi regolari quadrangolari – che, pur non avendo frontiera di classe 1,

(5) Più precisamente, con $H^m(A)$ si intende la chiusura, rispetto alla norma $\left(\sum_{\alpha\leq m} \|D_\alpha u\|^2_{\mathcal{L}^2(A)}\right)^{1/2}$, dell'insieme delle funzioni di classe C^∞ in $A \cup \mathcal{F}A$, e con $H_0^1(A)$ la chiusura, rispetto alla norma $\left(\sum_{\alpha\leq 1} \|D_\alpha u\|^2_{\mathcal{L}^2(A)}\right)^{1/2}$, dell'insieme delle funzioni di classe C^∞ in A, aventi supporto contenuto in A, ove con $D_\alpha u$ denotiamo il gradiente di u di ordine α. Nell'ipotesi che A sia un aperto *propriamente regolare*, la classe $H^m(A) \cap H_0^1(A)$ coincide con quella delle funzioni che hanno derivate parziali fino all'ordine m, in senso debole, di quadrato sommabile in A e che hanno « traccia », nel senso di Fichera, nulla su $\mathcal{F}A$.

sono però *propriamente regolari*, ed in corrispondenza ai quali, tuttavia, *non* si ha la limitatezza di $\Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ in $H^2(A) \cap H_0^1(A)$.

Richiamiamo, anzitutto, la definizione di aperto propriamente regolare data da G. Fichera. Un aperto limitato A dicesi *propriamente regolare* se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1) la frontiera $\mathcal{F}A$ di A è costituita da un numero finito q di porzioni di superficie regolare $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_q$ (6) a due a due aventi, al più, punti dei loro bordi in comune, ed inoltre, in A, sono applicabili le formule integrali di Gauss-Green;

2) esistono un numero reale positivo ρ_0 e, per ogni $x \in \mathcal{F}A$, un versore $\mu(x)$, avente origine in x, sempre penetrante in A, continuo su tutta $\mathcal{F}A$ e di classe 1 su ciascuna Σ_k, tali che l'insieme T_+ (l'insieme T_-) descritto da $x + \rho\mu(x)$ quando x percorre $\mathcal{F}A$ e ρ si muove nel segmento $0 < \rho < \rho_0$ (nel segmento $-\rho_0 < \rho \leq 0$) sia contenuto in A (nel complementare di A).

Sia τ un numero reale positivo e sia A_τ l'aperto definito dalle seguenti limitazioni: $|x| < 1$, $x_3 < -\tau \max(|x_1|, |x_2|)$. Come subito si vede, A_τ è una piramide regolare, quadrangolare, convessa, con il vertice in zero e la base contenuta nella superficie sferica Σ d'equazione $|x| = 1$; la base è un quadrangolo regolare, convesso, della superficie sferica Σ, i cui quattro lati sono archi di circonferenza massima di Σ aventi tutti la medesima lunghezza, e i cui quattro angoli sono tutti eguali tra loro.

Per provare la nostra tesi, ci basterà dimostrare i seguenti due teoremi:

I. *Qualunque sia* τ, *l'aperto* A_τ *è propriamente regolare.*

II. *Esiste un* $\tau > 0$ *tale che*:

$$\inf_{v \in H^2(A_\tau) \cap H_0^1(A_\tau) - 0} \frac{\|\Delta v\|_{\mathcal{L}^2(A_\tau)}}{\|D_2 v\|_{\mathcal{L}^2(A_\tau)}} = 0. \tag{4}$$

Cominciamo col dimostrare I. È intanto evidente che, se indichiamo con $\Sigma_1 \equiv \Sigma_1^\tau$ la base (sferica) della piramide A_τ e con $\Sigma_k \equiv \Sigma_k^\tau$ $(k = 2, 3, 4, 5)$ ciascuna delle quattro facce laterali di tale piramide, riesce $\mathcal{F}A_\tau = \bigcup_1^5{}_k \Sigma_k$ e risulta soddisfatta la condizione 1) di cui alla definizione di aperto *propriamente regolare*, con $q = 5$ (infatti le Σ_k sono porzioni di superficie regolare, dato che Σ_1 è un quadrangolo regolare, convesso, contenuto nella superficie sferica Σ, i cui lati sono archi di circonferenza massima di Σ, ed ogni

(6) Chiamiamo *porzione di superficie regolare* ogni insieme Σ che sia il codominio di una funzione vettoriale $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, definita al variare di (u, v) in un dominio limitato D del piano u, v e verificante le seguenti condizioni: 1°) le $x_i(u, v)$ sono di classe 1 in D; 2°) la corrispondenza posta dalle equazioni $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, tra i punti di Σ e quelli di D è biunivoca; 3°) la matrice jacobiana $\partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(u, v)$ ha sempre caratteristica 2. L'immagine della frontiera $\mathcal{F}D$ di D chiamasi *bordo* di Σ e verrà qui denotato con $\mathcal{B}\Sigma$; è facile vedere che $\mathcal{B}\Sigma$ non dipende dalla funzione vettoriale $x_i = x_i(u, v)$ ma soltanto da Σ.

Σ_k ($k = 2, \cdots, 5$) è un triangolo piano con due lati rettilinei ed il terzo costituito da un arco di circonferenza massima di Σ). Si denoti con $\mu(x)$ il versore avente origine nel punto x di $\mathcal{F}A_\tau$, tale che la semiretta orientata avente origine in x ed individuata da $\mu(x)$ contenga il punto $(0, 0, -1/2)$. È immediato constatare che $\mu(x)$ è continuo su $\mathcal{F}A_\tau$, e di classe C^∞ su ognuno dei Σ_k, $k = 1, \cdots, 5$. Inoltre il versore $\mu(x)$ è sempre *penetrante* in A_τ. L'esistenza di un numero reale positivo ρ_0 soddisfacente – in relazione a $\mu(x)$ – alla condizione 2) è evidente. In tal modo il teorema I è dimostrato.

Il teorema II è incluso in un risultato recentemente ottenuto da M. S. Hanna e da K. T. Smith [7]. Infatti, questi Autori, in tale lavoro, indicato con Δ' l'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie Σ, hanno mostrato che, se il problema d'autovalori:

$$\Delta' w + \lambda w = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma_1^\tau - \mathcal{B}\Sigma_1^\tau, \qquad w = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{B}\Sigma_1^\tau \tag{5}$$

nella classe $H^2(\Sigma_1^\tau - \mathcal{B}\Sigma_1^\tau) \cap H_0^1(\Sigma_1^\tau - \mathcal{B}\Sigma_1^\tau)$ ha, come autovalore, il numero $\lambda = 3/4$, allora, in relazione ad A_τ sussiste la (4) (cfr. [8] teorema 1' di pag. 578). E, d'altra parte, al variare di τ in $0 < \tau < +\infty$, esiste certamente un valore di τ in corrispondenza al quale il problema (5) ha come autovalore il numero $\lambda = 3/4$. Infatti, il più basso autovalore $\lambda_1 \equiv \lambda_1(\tau)$ del problema (5) è funzione continua e crescente di τ, divergente a $+\infty$ quando τ tende a $+\infty$ (cfr. [8] pag. 579) ed inoltre è $\lambda_1(\tau) < 3/4$ per tutti quei τ in corrispondenza ad ognuno dei quali Σ_1^τ contiene la calotta sferica Σ_0 definita da $|x| = 1$, $-1 \leq x_3 < t_0$, ove t_0 è lo zero, in $-1 < t < 0$, della funzione sferica $P_{1/2}(t)$; ciò segue dal fatto che il problema d'autovalori

$$\Delta' w + \lambda w = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma_0, \qquad w = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{B}\Sigma_0 \tag{6}$$

nella classe $H^2(\Sigma_0) \cap H_0^1(\Sigma_0)$, ha, come più basso autovalore, il numero $\lambda = 3/4$ (cfr. [8] pag. 584), e dal fatto che, essendo $\Sigma_1^\tau \supset \Sigma_0$, il più basso autovalore di (5) risulta minore del più basso autovalore di (6).

In tal modo i teoremi I e II sono dimostrati e la nostra tesi rimane, così, acquisita.

Per quanto riguarda, poi, l'ipotesi che A sia *propriamente regolare*, vogliamo qui, da ultimo, notare che ipotesi di regolarità sul contorno $\mathcal{F}A$ di A del tipo di quelle fatte appunto in [1] [2] (o altre, ancora più generali, che potrebbero esser fatte, come quelle di « contorno lipschitziano » etc.) hanno soltanto lo scopo di consentire l'introduzione di una nozione di « traccia nulla » su $T_0 \times \mathcal{F}A$, per le funzioni di $\mathcal{H}$ (cioè per le funzioni della classe in cui si cerca la soluzione del problema (1) (2)), che, come quella data da G. Fichera (cfr. nota [3]), conservi un carattere di « limite puntuale nullo » lungo ogni curva di un opportuno sistema di curve uscenti dai punti di $\mathcal{F}A$ e penetranti in A. Ma, ove si volesse rinunciare a tale carattere puntuale per

(7) Cfr. [8].

la « traccia », non si incontrerebbe difficoltà alcuna nell'abolire ogni ipotesi di regolarità su $\mathcal{F}$A, limitandosi solo a richiedere che A sia un aperto limitato di R^3. La famiglia $\mathcal{H}$, in cui ricercare la soluzione del problema (1) (2), sarebbe, allora, la chiusura, rispetto alla norma introdotta dal prodotto scalare (3'), della varietà $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(A \times T_0)$ delle funzioni di $C^{\infty}(A \times T_0)$ aventi supporto contenuto in $A \times T_0$. Con riferimento a tali nuove ipotesi ed assunzioni (per A e per $\mathcal{H}$) il teorema d'esistenza ed unicità per (1) (2) che abbiamo richiamato in principio (enunciato in [1] e dimostrato in [2]) rimane inalterato, e così pure inalterata rimane la sua dimostrazione. In effetti, il procedimento dimostrativo esposto in [2], come già si è qui ricordato, riposa soltanto sulla dimostrazione della formula di maggiorazione (3); e d'altra parte la (3) sussiste in relazione ad un aperto A qualsiasi purché $v(x, t)$ appartenga a $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(A \times T_0)$ (cfr. [2] pp. 11–16); dunque la (3) vale anche per ogni v che appartenga alla classe $\mathcal{H}$ testé introdotta (A essendo sempre un aperto limitato qualsiasi). Così il nostro asserto è provato.

L'osservazione che abbiamo ora fatta, relativamente alle ipotesi sull'aperto A, può essere ripetuta anche con riferimento ai risultati stabiliti in [3], ove si studia lo spettro della trasformazione integro-differenziale a primo membro di (1) (8).

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. DE VITO, *Sulla equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra*, « Acc. Naz. Lincei, Rend. Classe Sci. fis. mat. nat. », serie VIII, vol. XXIX (1960).

[2] L. DE VITO, *Sulla equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra*, « Memorie dell'Acc. delle Sci. di Torino », serie III, t. 4 (1960).

[3] L. DE VITO, *Sullo spettro della trasformazione integro-differenziale di Volterra*, « Acc. Naz. Lincei, Rend. Classe Sci. fis. mat. nat. », serie VIII, vol. XXX (1961).

(8) Dopo queste ultime osservazioni, si può portare un esempio – ancora più semplice del precedente – di aperto A in corrispondenza al quale sussiste tutta la teoria svolta in [1], [2] (e anche in [3]) mentre non è vera la limitatezza dell'operatore $\Delta^{-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ in $H^2(A) \cap H_0^1(A)$ (e quindi non è applicabile il metodo suggerito da E. Magenes). Infatti, se A è il cono aperto che proietta dall'origine O degli assi la calotta sferica Σ_0 dianzi introdotta, l'aperto A fornisce l'esempio cercato. In effetti, dal teorema 1' di [8] e dal fatto che il problema (6) ha come più basso autovalore il numero $\lambda = 3/4$, segue che l'operatore $\Delta^{-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ non è limitato in $H^2(A) \cap H_0^1(A)$; e d'altra parte, essendo A un aperto limitato di R^3, in relazione ad A sussiste tutta la teoria svolta in [1], [2], [3], con la definizione di $\mathcal{H}$ sopra indicata. Si noti, inoltre, che A ha la frontiera localmente lipschitziana e quindi è possibile definire la « traccia » su $\mathcal{F}$A per le funzioni di $H^m(A)$ come limite puntuale, per esempio lungo quasi tutte le parallele all'asse del cono A, uscenti da punti di $\mathcal{F}$A, e si può vedere che la totalità delle funzioni di $H^m(A)$ che hanno « traccia nulla » su $\mathcal{F}$A, in questo senso, coincide con $H^m(A) \cap H_0^1(A)$, come nel caso degli aperti propriamente regolari (cfr. nota (5)), benché A non sia, questa volta, un aperto propriamente regolare.

[4] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », serie III, vol. IV, 1950; Pubbl. dell'INAC n. 248, 1949.

[5] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziali, del 1954. Ed. Cremonese 1955, Roma.

[6] G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Ist. Naz. Alta Mat., 1958.

[7] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, « Lecture Notes in Math. », n. 8, Springer-Verlag, 1965.

[8] M. S. HANNA-K. T. SMITH, *Some Remarks on the Dirichlet Problem in Piecewise Smooth Domains*, « Comm. on Pure and Appl. Math. », vol. XXX (1967).