Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Mehmet Namik Oğuztöreli

Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.5, p. 625–632.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_625_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica. — *Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti* (1). Nota I di DEMETRIO MANGERON (2),(3) e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELİ (4), presentata (*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Certain estimates for the solutions of boundary value problems for polyvibrating systems are established and extensions of M. Picone's classical results are obtained.

1. Studi di certi spazi funzionali corrispondenti, nell'ambito della teoria delle funzioni rappresentate, alle funzioni speciali – soluzioni di varie classi di equazioni polivibranti (5) presenta oggidì un incontestabile interesse. Esso è coadiuvato dall'importanza che acquistano vieppiù tali equazioni come modelli matematici di certi problemi attuali di controllo spettanti tanto alla cibernetica quanto anche alla bionica. Equazioni polivibranti, lineari o no, contenenti, in generale, operatori ereditari ed argomenti ritardati [1]–[3] sono caratterizzate – come abbiamo accennato varie volte e parecchi autori hanno poscia continuato le nostre ricerche [4]–[8] – per ciò che riguarda operatori differenziali d'ordine superiore–dalla presenza delle *derivate totali*, introdotte, con tanto profitto, dall'illustre Accademico Linceo Mauro Picone [9], [10].

In ciò che segue si espone una prima serie di risultati concernenti l'estensione dei metodi di maggiorazione di Picone [11], [12] alle soluzioni di alcune classi lineari di sistemi funzionali polivibranti, utili soprattutto nello studio dei problemi dello sviluppo in serie di autofunzioni spettanti all'analisi spettrale in questo dominio (6).

(*) Nella seduta del 20 aprile 1968.

(1) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(2) Istituto Politecnico di Iași, Repubblica Socialista Romania. Per il momento in qualità di «Visiting Professor» all'*University of Alberta, Department of Mathematics*, Edmonton, Alberta, Canada.

(3) The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(4) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(5) Le equazioni polivibranti sono state chiamate da alcuni scienziati «equazioni di Mangeron» [13] – [16].

(6) Il lettore è rimandato per vari dettagli algoritmici e serie di applicazioni, preparati per programmazione dei calcoli alle calcolatrici elettroniche, alla Memoria degli autori da pubblicarsi nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași*.

2. Consideriamo, nell'ambito dei nostri studi concernenti le equazioni polivibranti, il seguente sistema funzionale che generalizza quello di Sturm–Liouville:

$$[A(x)\,u'(x) + \lambda B(x)\,u(x)]' + \lambda\,[B(x)\,u'(x) + C(x)\,u(x)] = 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \quad , \quad u(x)\big|_{\mathrm{Fr}\,R^*} = 0,$$

$$u(x), A(x), B(x), C(x) = u(x_1, x_2, \cdots, x_m), A(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots,$$

la *novità* del quale consiste nel fatto che l'iperrettangolo $R^* = \{x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ è a m dimensioni ed il simbolo $'$ denota la derivata totale del primo ordine

$$u' \equiv \frac{\partial^m u(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m}.$$

In questo ordine di idee hanno luogo, tra l'altro, i seguenti teoremi.

TEOREMA I. – *Esiste una successione illimitata di autovalori di* λ

$$\cdots, \lambda_{-n}, \cdots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots,$$

$$\cdots < \lambda_{-n} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

(*costantemente crescente da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *riuscendo* $\lambda_{-0} = -\infty$ *se* $(-1)^{m+1}\,C(x)$ *si mantiene non negativa nell'iperrettangolo* R, $\lambda_0 = +\infty$ *se* $(-1)^{m+1}\,C(x)$ *si mantiene non positiva*, λ_{-n} *e* λ_n *finiti, qualunque valore abbia l'indice* n, *se* $C(x)$ *prende valori del segno opposto*) *tali che l'equazione*

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m}\left(A(x_1, x_2, \cdots, x_m)\,\frac{\partial^m u_h(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m}\right) + \lambda_h C(x_1, x_2, \cdots, x_m)\,u_h(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \tag{1}$$

è dotata di un'autosoluzione $u_h(x)$ (*determinata a meno di un fattore costante*), *nell'ipotesi* $A(x) > 0$ *in* $R = \{a_i \leq x_i \leq b_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ *ed eventuali restrizioni di simmetria, verificante le condizioni al contorno* Fr R

$$u_h(x_1, x_2, \cdots, x_m)\big|_{\mathrm{Fr}\,R} = 0. \tag{2}$$

TEOREMA II. – *L'autosoluzione* $u_h(x)$, *oltre che sulla frontiera* Fr R *di* R, *si annulla nell'interno di* R *precisamente su* $|h|$ *porzioni di ipersuperficie e su* $|h|$ *soltanto.*

TEOREMA III. – *Detto* Γ_h *l'aggregato delle funzioni reali* $u^*(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, *definite nell'iperrettangolo* $R = \{a_i \leq x_i \leq b_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, *ivi assolutamente continue e dotate di derivata totale del primo ordine finita e di quadrato sommabile, nulle sulla frontiera* Fr R *di* R *e sulle porzioni di ipersuperficie contenute in* R *ove si annulla l'autosoluzione* $u_h(x)$, *soluzione del sistema funzionale polivibrante* (1), (2).

L'integrale

$$
\mathrm{I}_h[u] \equiv \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \left[\mathrm{A}(x) \left(\frac{\partial^m u^*(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m} \right)^2 + (-1)^m \lambda_h \mathrm{C}(x)\, u^{*2}(x) \right] \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \tag{3}
$$

ha in R *per minimo lo zero che consegue quando e solo quando* $u = \alpha u_h$, α *designando una costante, si ha cioè, per ogni funzione* u *di* Γ_h,

$$
\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \mathrm{A}(x_1, x_2, \cdots, x_m) \left(\frac{\partial^m u^*(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m} \right)^2 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \tag{4}
$$

$$
\geq (-1)^{m+1} \lambda_h \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \mathrm{C}(x_1, x_2, \cdots, x_m)\, u^{*2}(x_1, x_2, \cdots, x_m)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m ,
$$

il segno eguale sussistendo quando e solo quando $u^* = \alpha u_h$.

3. Siano ora $u(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ e $\mathrm{A}(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ due funzioni reali definite in R ivi assolutamente continue, essendovi la $u(x)$ dotata di derivata totale prima di quadrato sommabile, nulla sulla frontiera di R, mentre $\mathrm{A}(x) > 0$. Detto $c = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$ un punto di R ove la $|u(x)|$ consegue il suo massimo, ha luogo la seguente formola elementare di maggiorazione:

$$
|u(c_1, c_2, \cdots, c_m)|^2 = \max_{\mathrm{R}} |u(x)|^2 \tag{5}
$$

$$
\leq [\min_{c \in \mathrm{R}} \mathfrak{A}(c_1, c_2, \cdots, c_m)]^{-1} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \mathrm{A}(x) \left(\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m ,
$$

ove si è posto

$$
\mathfrak{A} = \left(\int_{a_1}^{c_1} \cdots \int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\, \mathrm{d}x \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{a_1}^{c_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}} \int_{c_i}^{b_i} \int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}} \cdots \int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\, \mathrm{d}x \right)^{-1} \tag{6}
$$

$$
+ \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{a_1}^{c_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}} \int_{c_i}^{b_i} \int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}} \cdots \int_{a_{j-1}}^{c_{j-1}} \int_{c_j}^{b_j} \int_{a_{j+1}}^{c_{j+1}} \cdots \int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\, \mathrm{d}x \right)^{-1} + \cdots
$$

$$
+ \left(\int_{c_1}^{b_1} \cdots \int_{c_m}^{b_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\, \mathrm{d}x \right)^{-1}, \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m ,
$$

essendo, per conseguenza, $c_1, c_2, \cdots, c_m$ soluzioni del sistema

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & \int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(c_1, x_2, \cdots, x_m)\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \\
& \times\left[\left(\int_{c_1}^{b_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2} - \left(\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right] \\
& + \sum_{i=2,3,\cdots,m} \int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(c_1, x_2, \cdots, x_m)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m \\
& \times\left[\left(\int_{c_1}^{b_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2} - \left(\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right] \\
& + \sum_{\substack{i,j=2,3,\cdots,m \\ i<j}} \int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_{j-1}}^{c_{j-1}}\int_{c_j}^{b_j}\int_{a_{j+1}}^{c_{j+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(c_1, x_2, \cdots, x_m)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m \\
& \times\left[\left(\int_{c_1}^{b_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_{j-1}}^{c_{j-1}}\int_{c_j}^{b_j}\int_{a_{j+1}}^{c_{j+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right. \\
& \left. -\left(\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_2}^{c_2}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_{j-1}}^{c_{j-1}}\int_{c_j}^{b_j}\int_{a_{j+1}}^{c_{j+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right] + \cdots \\
& + \int_{c_2}^{b_2}\cdots\int_{c_m}^{b_m} \mathrm{A}^{-1}(c_1, x_2, \cdots, x_m)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m \\
& \times\left[\left(\int_{c_1}^{b_1}\int_{c_2}^{b_2}\cdots\int_{c_m}^{b_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2} - \left(\int_{a_1}^{c_1}\int_{c_2}^{b_2}\cdots\int_{c_m}^{b_m} \mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_m}^{c_m} \mathrm{A}^{-1}(x_1, c_2, x_2, \cdots, x_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_m
$$

$$\times\left[\left(\int_{c_2}^{b_2}\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_m}^{c_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}-\left(\int_{a_2}^{c_2}\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_m}^{c_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right]$$

$$+\sum_{i=1,3,\cdots,m}\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m}\mathrm{A}^{-1}(x_1\,,c_2\,,x_3\cdots,x_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_m$$

$$\times\left[\left(\int_{c_2}^{b_2}\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{a_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right.$$

$$\left.-\left(\int_{a_2}^{c_2}\int_{a_1}^{c_1}\int_{a_3}^{c_3}\cdots\int_{a_{i-1}}^{c_{i-1}}\int_{c_i}^{b_i}\int_{a_{i+1}}^{c_{i+1}}\cdots\int_{a_m}^{c_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right]+\cdots$$

$$+\int_{c_1}^{b_1}\int_{c_3}^{b_3}\cdots\int_{c_m}^{b_m}\mathrm{A}^{-1}(x_1\,,c_2\,,x_3\,,\cdots,x_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_m$$

$$\times\left[\left(\int_{c_2}^{b_2}\int_{c_1}^{b_1}\int_{c_3}^{b_3}\cdots\int_{c_m}^{b_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}-\left(\int_{a_2}^{c_2}\int_{c_1}^{b_1}\int_{c_3}^{b_3}\cdots\int_{c_m}^{b_m}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right]=0\,,$$

$$\cdots,$$

$$\int_{a_1}^{c_1}\cdots\int_{a_{m-1}}^{c_{m-1}}\mathrm{A}^{-1}(x_1\,,\cdots,x_{m-1}\,,c_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{m-1}$$

$$\times\left[\left(\int_{c_m}^{b_m}\int_{a_1}^{c_1}\cdots\int_{a_{m-1}}^{c_{m-1}}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}-\left(\int_{a_m}^{c_m}\int_{a_1}^{c_1}\cdots\int_{a_{m-1}}^{c_{m-1}}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right]+\cdots$$

$$+\int_{c_1}^{b_1}\cdots\int_{c_{m-1}}^{b_{m-1}}\mathrm{A}^{-1}(x_1\,,\cdots,x_{m-1}\,,c_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{m-1}$$

$$\times\left[\left(\int_{c_m}^{b_m}\int_{c_1}^{b_1}\cdots\int_{c_{m-1}}^{b_{m-1}}\mathrm{A}^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}-\left(\int_{a_m}^{c_m}\int_{c_1}^{b_1}\cdots\int_{c_{m-1}}^{b_{m-1}}\mathrm{A}^{(-1)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-2}\right]=0\,,$$

ove per x e $\mathrm{d}x$ si intende successivamente $x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m$; $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$; $c_1\,,x_2\,,\cdots,x_m$; $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_m$;$\cdots$

In particolare, per $A = \prod_{i=1}^{m} A_i(x_i)$ (7), $A_i(x_i) > 0$ in R, si ha

$$[\min_{c \in R} \mathfrak{A}]^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} A_i^{-1}(x_i)\, dx_i}{2^{2m}}, \tag{8}$$

ed, infine, per $A \equiv 1$, $\min_{c \in R} \mathfrak{A} = \frac{2^{2m}}{\prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)}$.

In quest'ultimo caso si ottiene, ad esempio, per le funzioni $u(x)$ assolutamente continue in R insieme con le loro derivate totali dei primi $n-1$ ordini e con la derivata totale d'ordine n di quadrato sommabile, nulle insieme con le sue prime $n-1$ derivate totali sulla frontiera Fr R di R

$$\frac{\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} \left(\frac{\partial^{mp} u(x)}{\partial x_1^p \, \partial x_2^p \cdots \partial x_m^p} \right)^2 dx_1\, dx_2 \cdots dx_m}{(b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m) \max_R \left| \frac{\partial^{m(p-1)} u(x)}{\partial x_1^{p-1} \cdots \partial x_m^{p-1}} \right|^2} \geq \frac{2^{2m}}{\prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2}, \tag{9}$$

$$(p = n, n-1, \cdots, 1).$$

Le (9) costituiscono, tra l'altro, l'estensione parziale dei risultati conseguiti anni or sono dal M. Janet [18] nei suoi studi concernenti la minimizzazione del rapporto $\int_a^b (y^{(p)})^2\, dx : \int_a^b (y^{(p-1)})^2\, dx$, ove $y^{(p-1)}, y^{(p)}$ denotano le derivate d'ordine $p-1$, p di una funzione y che si annulla insieme con le sue prime $p-1$ derivate alle estremità di un intervallo (a, b).

4. Limitandoci nella presente alla considerazione dell'equazione polivibrante lineare

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} \left(A(x) \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} \right) + C(x)\, u(x) = f(x), \quad A(x) \geq p > 0 \text{ in R}, \tag{10}$$

$f(x)$ designando una funzione continua in R, supposto che l'unità non si trovi tra gli autovalori $\cdots, \lambda_n, \cdots, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots,$ del parametro λ dell'equazione (1) relativa alle condizioni al contorno (2). Sia, ad esempio, *m dispari*. Si ha il seguente

(7) Vedasi, in un altro ordine di idee che utilizzeremo in una nostra Nota susseguente, i recentissimi risultati conseguiti dall'Illustre Accademico Linceo M. Picone concernenti il calcolo numerico di un integrale pluridimensionale per decomposizione in prodotto dello integrando [17].

TEOREMA IV. – *Se riesce* in R

$$2^{2m} p - \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2 \, \mathrm{M} > 0 ,$$

per l'integrale $u(x)$ *della* (10) *verificante le condizioni omogenee* (2) *sussiste la seguente formola di maggiorazione*

$$\max_{\mathrm{R}} |u| \leq \frac{\prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2}{2^{2m} p - \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2 \, \mathrm{M}} \max_{\mathrm{R}} |f| ,$$

ove con M *si è notato un numero non negativo non inferiore al massimo di* C (x) *in* R.

In una prossima Nota si daranno altri teoremi concernenti la maggiorazione delle soluzioni di vari sistemi polivibranti, soddisfacenti alle più svariate condizioni al contorno omogenee o no, tenendovisi conto anche di eventuale conoscenza dei valori approssimanti gli autovalori del problema spettrale considerato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *Introduzione allo studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. 8a, XXXIX, *1–2*, 22–28 (1965).

[2] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELÎ, *Programmazione dei calcoli alle calcolatrici elettroniche per soluzioni di una classe di sistemi polivibranti.* Nota I. *Determinazione delle funzioni di Green spettanti ai problemi al contorno polivibranti.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat. » s. 8a (in stampa).

[3] D. MANGERON, *Problemi al contorno non lineari per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. 6a, XVI, 305–310 (1932).

[4] A. ROSENBLATT, *Sur l'approximation des solutions de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* « C. r. Acad. Sci., Paris », *198*, 1278–1280 (1933).

[5] G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* « Giorn. Mat. » ser. 4a, *78*, 81–96 (1948–1949).

[6] L. POLI e P. DELERUE, *Le Calcul symbolique à deux variables.* Gauthier–Villars, Paris 1954.

[7] T. AMANKULOV, *Risoluzione con approssimazione delle equazioni integro–differenziali di tipo misto con argomento ritardato* (in russo). Tesi di Laurea. Akad. Nauk Kirg. S.S.R., Frunze 1967.

[8] F. S. ROSSI, *Sul metodo di Mangeron concernente certi sistemi non lineari alle derivate parziali.* « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », s. n., IX (XIII), *3–4*, 55–60 (1963).

[9] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali di Fisica Matematica.* Conferenza tenuta il 12 maggio 1937 presso il Seminario Matematico dell'Università di Iasi. Cfr. « Ann. Sci. Univ. Jassy », I Sect., XXVI, (*1*), 183–232 (1940).

[10] M. PICONE, Annuario dell'Accademia dei XL, 287–311, Roma 1961.

[11] M. PICONE, *Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie lineari autoaggiunte*. Math. Z., *28*, 519–555 (1928).

[12] M. PICONE, *Cenni biografici sull'opera scientifica di Mauro Picone*. Estratto da una lettera diretta dal prof. Octav Onicescu dell'Accademia della Repubblica Socialista di Romania. Roma, luglio 3, 1967. 13 p.

[13] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », s. 2ª, V, 51–72 (1936).

[14] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites « équations de Mangeron »*. Bull. Inst. Polytechn. Jassy », s. n., XI (XV), 1–2, 25–30 1965.

[15] Yu. M. BEREZANSKI, *Sviluppo in serie di autofunzioni degli operatori autoconiugati* (in russo). « Naukova Dumka », Kiev 1965.

[16] T. KAMYTOV, *Applicazione del metodo di Mangeron nello studio di alcuni sistemi integro-differenziali*. Trudy I MezhVUZ Konf. Kirg. S. S. R. 1966.

[17] M. PICONE, *Sulla relazione fondamentale del calcolo numerico di un integrale pluridimensionale per decomposizione in prodotto dell'integrando*. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis. mat., e nat ». s. 8ª, XLIII (1–2), 3–8 (1967).

[18] M. FRÉCHET, *Détermination explicite de certains minima dans des problèmes variationnels*. « C. r. Acad. Sci., Paris ». *194*, 2109–2111 (1932).