
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

EDOARDO STORCHI

**Condizione di congruenza per una membrana ed
integrale generale delle equazioni indefinite di
equilibrio**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.4, p. 527–532.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_4_527_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Condizione di congruenza per una membrana ed integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Socio SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — Author states the condition of compatibility for the system $\xi_{ik} = \frac{1}{2}(s_{i|k} + s_{k|i})$ ($i, k = 1, 2$), where ξ_{ik} denotes the strain tensor and s_i the infinitesimal regular displacement vector. It is shown that the condition is unique and of the fifth order for general surfaces, i.e. for Riemannian two-dimensional varieties with variable curvature. In connection with the previous result, the author gives the solution of the well known yet unsolved problem of finding the general tensorial expression of the stresses p_{ik} , satisfying the indefinite equilibrium equations of continuous media $p_{ik}^{|k} = 0$ ($i, k = 1, 2$).

In questa breve Nota riassuntiva vengono comunicati alcuni risultati attinenti la Meccanica dei sistemi continui deformabili ed esposti dettagliatamente in una conferenza tenuta il 2 aprile 1968 presso l'Istituto di Alta Matematica in Roma (1).

Il fondamentale problema della determinazione delle condizioni di congruenza per le deformazioni e così pure il problema duale della determinazione dell'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio dei sistemi continui, sono stati oggetto per circa un secolo di numerose ricerche. Non potendo qui ampiamente riferire, rimando per una dettagliata analisi dei due problemi e per la sintesi dei risultati al lavoro di C. Truesdell del 1960 (2) nel quale è riportata peraltro una estesissima ed esauriente bibliografia.

Nella presente Nota stabilirò la soluzione dei due accennati problemi nel caso bidimensionale, quando cioè il sistema continuo si schematizza con una membrana perfettamente flessibile tesa su una superficie rigida σ , comunque curva.

LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA.

La condizione di congruenza per una membrana tesa su una generica superficie σ è la condizione caratteristica alla quale deve ubbidire un tensore doppio simmetrico $\xi_{ik} = \xi_{ki}$ subordinato alla metrica

$$(1) \quad ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2)$$

(*) Nella seduta del 20 aprile 1968.

(1) E. STORCHI, *La condizione di congruenza per una membrana tesa su una generica superficie*. In corso di stampa presso i Symposia Mathematica dell'Istituto.

(2) C. TRUESDELL, *Invariant and complete Stress Functions for General Continua* « Archive for Rational Mechanics and Analysis », 4, 1-29 (1959-60).

della superficie σ , affinché esso possa assumersi come tensore di deformazione. Se $\mathbf{s}(P)$ è il vettore superficiale che definisce lo spostamento regolare ed infinitesimale del punto P della membrana sopra la superficie σ , il tensore di deformazione ξ_{ik} si esprime mediante il tensore doppio $s_{i/k}$ derivato di $\mathbf{s}$ nel modo seguente:

$$(2) \quad \xi_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i/k} + s_{k/i}) \quad (i, k = 1, 2).$$

Assegnato $\mathbf{s}$, rimane univocamente determinato il tensore ξ di deformazione. Viceversa, assegnato un generico tensore doppio simmetrico ξ subordinato alla metrica (1) della superficie, è evidente che ξ non può assumersi incondizionatamente come tensore di deformazione per una membrana tesa sulla superficie. Dovendo infatti le tre componenti di ξ dipendere dalle due componenti di un vettore superficiale $\mathbf{s}$ in conformità delle (2), è manifesto che ξ deve obbedire ad una condizione scalare

$$(*) \quad \Omega(\xi) = 0$$

$L'(*)$ costituisce appunto la condizione di congruenza 0, se si vuole, la condizione caratteristica di integrabilità (rispetto al vettore s_i) del sistema di equazioni differenziali (2).

Per determinare la effettiva struttura della $\Omega(\xi)$, partiamo dall'identità:

$$(3) \quad - \left[\epsilon^{ir} \epsilon^{ks} \left(\frac{s_{i/k} + s_{k/i}}{2} \right)_{/rs} + K a^{ik} \frac{s_{i/k} + s_{k/i}}{2} \right] \equiv K^{/i} s_i,$$

che è valida qualunque sia il vettore superficiale $\mathbf{s}$ ⁽³⁾.

Ammettiamo ora per ipotesi che il tensore ξ_{ik} dipenda da un assegnato vettore superficiale $\mathbf{s}$ in conformità della (2) e che quindi possa assumersi come tensore di deformazione per una membrana tesa sulla superficie. Posto

$$(4) \quad I = - [\epsilon^{ir} \epsilon^{ks} \xi_{ik/rs} + K a^{ik} \xi_{ik}],$$

dall'identità (3) discende allora l'equazione:

$$(5) \quad I = K^{/i} s_i$$

che lega linearmente il tensore di deformazione (contenuto nell'invariante I con le sue derivate seconde) alle componenti s_i dello spostamento. Se si introduce poi anche l'invariante

$$(6) \quad J = 2 K^{/i} I_{/i} - 2 K^{/i} K^{/k} \xi_{ik},$$

(3) La (3) si dimostra facilmente ricorrendo alla formula di commutazione delle derivate seconde covarianti applicata al vettore s_i ed al tensore doppio $s_{i/k}$. Nella (3), K (che riterremo nel seguito variabile col posto) denota la curvatura totale gaussiana della superficie, ϵ^{ir} il tensore emisimmetrico di Ricci, a^{ik} (come nella (1)) il tensore fondamentale.

dalla (5) si desume facilmente la seconda equazione:

$$(7) \quad J = H^{/i} s_i$$

che, al pari della (5), lega linearmente il tensore di deformazione allo spostamento (4).

Il sistema formato dalle (5) e (7) è un sistema lineare nelle due funzioni incognite $s_1(x_1, x_2)$, $s_2(x_1, x_2)$. Se il determinante

$$(8) \quad \bar{D} = \varepsilon^{ir} K_{/i} H_{/r}$$

non è nullo, il sistema stesso ammette una ed una sola soluzione, la seguente;

$$(9) \quad \bar{s}_i = \frac{\varepsilon_{ir}}{\bar{D}} (H^{/r} I - K^{/r} J).$$

Osserviamo peraltro che, sostituendo nelle (5) e (7) in luogo di s_i il valore $\bar{s}_i$ che ci porge la (9), si ottengono le due *identità*:

$$(5') \quad I \equiv K^{/i} \bar{s}_i \quad (7') \quad J \equiv H^{/i} \bar{s}_i.$$

Dalla (2), tenendo conto delle (5) e (7), discende inoltre:

$$(10) \quad 2 H^{/i} H^{/k} \left(\frac{s_{i/k} + s_{k/i}}{2} - \xi_{ik} \right) = 2 H^{/i} J_{/i} - 2 H^{/i} H^{/k} \xi_{ik} - (\Delta_1 H)^{/i} s_i = 0$$

$$(11) \quad 2 K^{/i} H^{/k} \left(\frac{s_{i/k} + s_{k/i}}{2} - \xi_{ik} \right) = H^{/i} I_{/i} + K^{/i} J_{/i} - \\ - 2 K^{/i} H^{/k} \xi_{ik} - \Delta(K, H)^{/i} s_i = 0.$$

Posto

$$(12) \quad L = 2 H^{/i} J_{/i} - 2 H^{/i} H^{/k} \xi_{ik}$$

$$(13) \quad M = H^{/i} I_{/i} + K^{/i} J_{/i} - 2 K^{/i} H^{/k} \xi_{ik},$$

le (10) ed (11) danno luogo al nuovo sistema lineare:

$$(10') \quad L = (\Delta_1 H)^{/i} s_i \quad (11') \quad M = \Delta(K, H)^{/i} s_i$$

nelle due funzioni incognite s_1 ed s_2 . Se il determinante

$$(14) \quad D^* = \varepsilon^{ir} (\Delta_1 H)_{/i} \Delta(K, H)_{/r}$$

è diverso da zero, tale sistema ammette una ed una sola soluzione, la seguente:

$$(15) \quad s_i^* = \frac{\varepsilon_{ir}}{D^*} (L \Delta(K, H)^{/r} - M (\Delta_1 H)^{/r}).$$

(4) Qui con H si è indicato brevemente il parametro differenziale primo $\Delta_1 K = K^{/i} K_{/i}$ della curvatura totale; in seguito indicheremo inoltre con $\Delta(K, H) = K^{/i} H_{/i}$ il parametro differenziale misto di K ed H .

Osserviamo inoltre che, se nelle (10) ed (11) in luogo di s_i si pone il valore s_i^* dato dalla (15), si ottengono le due *identità*:

$$(10'') \quad H^{/i} H^{/k} \left(\frac{s_{i/k}^* + s_{k/i}^*}{2} - \xi_{ik} \right) \equiv 0 \quad (11'') \quad K^{/i} H^{/k} \left(\frac{s_{i/k}^* + s_{k/i}^*}{2} - \xi_{ik} \right) \equiv 0.$$

Eguagliando le due espressioni (9) e (15) dello spostamento $\mathbf{s}$, componendo coi vettori $K^{/i}$ ed $H^{/i}$ e tenendo altresì conto delle due identità (5') e (7'), si perviene così alle due equazioni:

$$(16) \quad \mathbf{I} = K^{/i} s_i^* \quad (17) \quad \mathbf{J} = H^{/i} s_i^*.$$

Le (16) e (17) sono due condizioni di congruenza alle quali deve obbedire necessariamente il tensore ξ affinché esso possa interpretarsi come tensore di deformazione. Tali condizioni sono del *quarto* ordine in quanto gli invarianti L ed M che in esse compaiono attraverso ad s_i^* contengono il tensore ξ insieme alle sue derivate fino alle quarte. Dalle (16) e (17), tenuto conto della (6), si desume allora subito la seguente condizione di congruenza del *quinto* ordine:

$$(*) \quad \Omega(\xi) = K^{/i} K^{/k} \left(\frac{s_{i/k}^* + s_{k/i}^*}{2} - \xi_{ik} \right) = 0.$$

L'(*), come la (16) e la (17) dalle quali proviene, è una condizione che il tensore ξ deve necessariamente verificare. Dimostriamo ora che l'(*) è altresì sufficiente. Dimostriamo propriamente che *se un tensore doppio simmetrico ξ_{ik} subordinato alla metrica (1) della generica superficie σ obbedisce all'(*), allora esso proviene necessariamente da un vettore superficiale $\mathbf{s}$ in conformità della (2).*

Per ipotesi ora il generico tensore superficiale ξ obbedisce all'(*). Posto

$$(18) \quad T_{ik} = \frac{s_{i/k}^* + s_{k/i}^*}{2} - \xi_{ik} \quad (i, k = 1, 2),$$

l'(*) esprime che il tensore doppio simmetrico T_{ik} soddisfa all'equazione:

$$(19) \quad K^{/i} K^{/k} T_{ik} = 0.$$

In virtù delle (10'') ed (11'') lo stesso tensore T_{ik} verifica però anche le due identità:

$$(19') \quad H^{/i} H^{/k} T_{ik} \equiv 0 \quad (19'') \quad K^{/i} H^{/k} T_{ik} \equiv 0.$$

Dalle (19), (19'), (19'') discende allora $T_{ik} = 0$ e quindi:

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i/k}^* + s_{k/i}^*) \quad (i, k = 1, 2).$$

Se il tensore ξ obbedisce all'(*), esiste quindi un vettore superficiale (precisamente il vettore $\mathbf{s}^*$ dato dalla (15)) dal quale il tensore ξ dipende in conformità della (2). La reversibilità della condizione di congruenza (*) rimane così provata. Si conclude quindi che *la condizione di congruenza per una membrana tesa su una generica superficie è una sola e del quinto ordine.*

Quando venga scritta per esteso, $l^{(*)}$ assume la forma:

$$(*) \quad \Omega(\xi) = A^{ik} \xi_{ik} + B^{ikr} \xi_{ik|r} + C^{ikrs} \xi_{ik|rs} + D^{ikrsp} \xi_{ik|rsp} + \\ + E^{ikrspq} \xi_{ik|rspq} + F^{ikrspqt} \xi_{ik|rspqt} = 0.$$

I tensori $A^{ik}, B^{ikr}, \dots$ che nell'(*) si compongono col tensore ξ_{ik} e con le sue derivate fino alle quinte, dipendono esclusivamente dalla metrica della superficie e sono quindi tutti esprimibili mediante il tensore fondamentale.

OSSERVAZIONE.

Per stabilire $l^{(*)}$ abbiamo dovuto supporre variabile col posto la curvatura totale K e diversi da zero i due determinanti $\bar{D}$ e D^* . Se una delle tre condizioni:

$$(20) \quad K = \text{costante} \quad (21) \quad \bar{D} = \varepsilon^{ir} K_{|i} H_{|r} = 0$$

$$(22) \quad D^* = \varepsilon^{ir} (\Delta_1 H)_{|i} \Delta(K, H)_{|r} = 0$$

è verificata, la condizione di congruenza risulta di ordine inferiore al quinto. Le superficie caratterizzate dalle (20), (21), (22) sono dunque tutte e sole le *superficie eccezionali* per il problema della congruenza. Per le superficie a curvatura costante ed in particolare per le sviluppabili, dalla (5) discende subito la condizione di congruenza del *secondo* ordine ⁽⁵⁾ $I = 0$, la cui reversibilità si può provare facilmente. Se è verificata la (21) esiste un legame funzionale fra H e K , risulta cioè $H = f(K)$. Dalla (7) discende allora:

$$(7'') \quad J = f'(K) K^{/i} s_i = \frac{\Delta(K, H)}{H} K^{/i} s_i.$$

Per la compatibilità delle (5) e (7'') deve quindi essere verificata la seguente condizione di congruenza del *terzo* ordine ⁽⁶⁾:

$$(23) \quad HJ - \Delta(K, H)I = 0.$$

Infine per le superficie caratterizzate dalla (22) esiste un legame funzionale fra i due parametri differenziali $\Delta_1 H$ e $\Delta(K, H)$. Essendo $\Delta_1 H = F[\Delta(K, H)]$, le due equazioni (10') ed (11') risultano compatibili se e solo se il tensore ξ obbedisce alla seguente condizione di congruenza del *quarto* ordine:

$$(24) \quad bL - aM = 0 \quad (a = \varepsilon^{ir} K_{|i} (\Delta_1 H)_{|r}, b = \varepsilon^{ir} K_{|i} \Delta(K, H)_{|r}).$$

Rimane tuttavia ancora aperto il problema di provare la reversibilità (estremamente probabile) delle condizioni di congruenza (23) e (24).

(5) Stabilita da B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », 63, 982 (1930).

(6) Stabilita da B. FINZI (*loc. cit.*, p. 981) e ritrovata, con metodo indipendente, da F. GRAIFF, *Sulle condizioni di congruenza per una membrana*, « Rend. Ist. Lomb. », 92, 40 (1957).

INTEGRALE GENERALE DELLE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO.

L. Finzi ⁽⁷⁾, in un lavoro apparso in questi Rendiconti nel 1956, ha mostrato come la stretta analogia formale che si rileva fra le condizioni di congruenza e l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio dei sistemi continui $p_{|k}^{ik} = F^i$ trovi la sua vera origine nel duplice aspetto che è possibile dare al principio dei lavori virtuali come rivelatore dell'equilibrio e come rivelatore della congruenza delle deformazioni. Applicando il principio dei lavori virtuali egli ha stabilito la semplice regola che fa passare dall'integrale generale delle equazioni omogenee di equilibrio $p_{|k}^{ik} = 0$ alla condizione di congruenza. Se

$$(25) \quad p^{ik} = a^{ik} \chi + b^{ikr} \chi_{|r} + c^{ikrs} \chi_{|rs} + \dots$$

è l'integrale generale delle equazioni di equilibrio per varietà bidimensionali comunque curve, la corrispondente condizione di congruenza è necessariamente la seguente:

$$(26) \quad \Omega(\xi) = a^{ik} \xi_{ik} - (b^{ikr} \xi_{ik})_{|r} + (c^{ikrs} \xi_{ik})_{|rs} - \dots = 0.$$

Valendosi delle (25) e (26), L. Finzi ha anche indicato come si possa risolvere il problema inverso, come si possa cioè determinare l'integrale generale delle equazioni di equilibrio quando sia conosciuta la condizione di congruenza. C. Truesdell infine ⁽⁸⁾, analizzando il lavoro di Finzi, ha dedotto la seguente regola, duale di quella stabilita da Finzi ed altrettanto semplice:

se

$$\Omega(\xi) = A^{ik} \xi_{ik} + B^{ikr} \xi_{ik|r} + C^{ikrs} \xi_{ik|rs} + \dots = 0$$

è la condizione di congruenza per una membrana tesa su una generica superficie, l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio presenta la forma:

$$p^{ik} = A^{ik} \chi - (B^{ikr} \chi)_{|r} + (C^{ikrs} \chi)_{|rs} - \dots$$

In virtù di quest'ultimo risultato, anche il problema dell'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio per le varietà bidimensionali comunque curve è definitivamente risolto. Se A^{ik} , B^{ikr} , C^{ikrs} ... sono i tensori dipendenti dalla metrica che compaiono nell'(*) e $\chi = \chi(x_1, x_2)$ è una funzione arbitraria del posto, l'integrale generale delle equazioni indefinite si esprime in forma invariante nel modo seguente:

$$(**) \quad p^{ik} = A^{ik} \chi - (B^{ikr} \chi)_{|r} + (C^{ikrs} \chi)_{|rs} - \\ - (D^{ikrsp} \chi)_{|rsp} + (E^{ikrspq} \chi)_{|rspq} - (F^{ikrspqt} \chi)_{|rspqt}.$$

(7) L. FINZI, *Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico*, « Rend. dei Lincei », Ser. VI, 20, 338-342.

(8) C. TRUESDELL, *General solution for the stresses in a curved membrane*, « Proc. nat. acad. sci. U. S. A. », 43, 1070-1072.