Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pier Vittorio Ceccherini

Su di un metodo di Beniamino Segre per stabilire la non esistenza di certe reti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.4, p. 506–511.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_4_506_0>

Geometria. — *Su di un metodo di Beniamino Segre per stabilire la non esistenza di certe reti.* Nota di PIER VITTORIO CECCHERINI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A necessary arithmetical condition (given by B. Segre) for the existence of nets $K_{t,n}$ is discussed and, in the case $t = 4$, simplified. It is then deduced that, when $t = 4$ and $n - 4 \equiv \pm 1 \pmod 6$, the only non-existence-theorem which may be proved with the above method is the one concerning the nets $K_{4,9}$.

1. La teoria delle reti consente fra l'altro di svolgere uno studio geometrico degli insiemi di sostituzioni, anche nell'ipotesi che queste non formino un gruppo. Essa è stata introdotta e ampiamente sviluppata da B. Segre [3, pp. 46–220], cui si rinvia per le notazioni ed i risultati qui appresso utilizzati (cfr. anche [1], [2]).

Un problema centrale di tale teoria è quello di stabilire condizioni (non banali) per l'*esistenza* o per la *non esistenza* di reti $K_{t,n}$. In proposito è noto (B. Segre [3, n. 7.10]) il seguente fondamentale teorema:

I – *Condizione necessaria affinché esista una rete* $K_{t,n}$ *è che risulti*:

$$(n-3)\,N_0 + (n-1)\,s \geq (n-1)(n-2)(n-3)\,r, \tag{1}$$

ove N_0, s *ed* r *hanno i significati specificati in* [3, *n.* 7.6, 7.7, 7.9].

È anche noto (C. Pedrini [2]) che:

II – *Condizione necessaria per l'esistenza di una* $K_{t,n}$ *con* $4 \leq t \leq n-3$ *è che risulti* $n - t \equiv \pm 1 \pmod 6$.

La II viene migliorata (P. V. Ceccherini [1]) dalla:

III – *Condizione necessaria per l'esistenza di una* $K_{t,n}$ *con* $4 \leq t \leq n-3$ *è che i numeri*

$$(n-r-2)\cdots(n-t+1)/[(t-r-1)\cdots 2]$$

risultino interi per $r = 0, 1, \cdots, t-3$.

In B. Segre [3, p. 260] viene esplicitamente segnalato il problema di sostituire la (1) con un'espressione più semplice, la quale esiga calcoli meno complicati. Una risposta parziale a tale problema è data dal teorema C del successivo n. 2; per $t = 4$, il problema viene poi agevolmente risolto in modo completo. Più precisamente, come verrà provato nel n. 4, si ha che, *tenuto conto della* II ed esclusi i casi banali $t \geq n-2$, il teorema I *equivale*, per $t = 4$, al seguente:

(*) Nella seduta del 20 aprile 1968.

A – *Condizione necessaria affinché esista una rete non banale* $K_{4,n}$, *con* $n-4 \equiv \pm 1 \pmod 6$, *è che risulti*

$$(2)\qquad (n-2)(n-5) \geq 0 \qquad \text{se } n-4 \equiv 1 \pmod 6,$$

$$(3)\qquad n^2 - 10\,n + 31 \leq 6\,[(n-5)(n-4)/6] \qquad \text{se } n-4 \equiv -1 \pmod 6.$$

Pertanto (tenuto conto della II*): quando* $n-4 \equiv 1 \pmod 6$, *la* (1) *non conduce ad alcuna condizione effettiva per l'esistenza d'una* $K_{4,n}$; *mentre invece, se* $n-4 \equiv -1 \pmod 6$, *allora la* (1) *implica la* $\nu_{4,9} = 0$, *ma non la* $\nu_{4,n} = 0$ *nell'ipotesi che sia* $n = 6\,k + 3 > 9$.

Il risultato A, pur nella sua forma negativa, presenta un certo interesse in quanto permette appunto di evitare in certi casi laboriosi calcoli.

2. Sia f un blocco di una $K_{t,n}$ $(4 \leq t \leq n-3)$ e sia (A, A') una coppia di punti distinti simmetrici rispetto ad f. Si denoti (come in [3, n. 7.9]) con s_i il numero dei blocchi di $K_{t,n}$ passanti per A e per A′ ed i–secanti f $(i = 0, 1, \cdots, t-1)$. Si noti che *a priori* s_i dipende dalla terna (f, A, A'). Però in [1, teorema VII] ho dimostrato che in ogni caso risulta

$$(4)\qquad s_{t-2} = 0,$$

e da ciò dedurremo ora facilmente che:

B – *I suddetti numeri* s_i *non dipendono dalla terna* (f, A, A') *considerata, ciascuno di essi potendosi calcolare in funzione soltanto di* t *e di* n *tramite la*

$$(5)\qquad s_i = a_i\,(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/i! \qquad (i = t-1, t-2, \cdots, 1, 0)$$

ove a_i *è il numero razionale definito per induzione decrescente da*

$$(6)\qquad a_{t-1} = 1\,,\quad a_i = 1 - \sum_{h=1}^{t-i-1} a_{i+h}/h\,! \qquad (i = t-2, t-3, \cdots, 1, 0).$$

Dimostrazione. Si denoti per semplicità con H l'insieme degli $n-2$ punti di f indipendenti da A (e da A′). Fissati in H $t-2$ punti distinti, si ottengono complessivamente t punti indipendenti, che individuano un blocco di $K_{t,n}$ secante f esattamente in $t-1$ punti (in forza della (4)); ogni tale blocco si ottiene così, da ciascuna delle $\binom{n-2}{t-2}$ $(t-2)$–ple, esattamente $\binom{t-1}{t-2} = t-1$ volte, talché:

$$(7)\qquad s_{t-1} = \binom{n-2}{t-2}\Big/(t-1) = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(t-1)\,!$$

Analogamente, $t-3$ punti di H possono venir scelti in $\binom{n-2}{t-3}$ modi diversi; per ciascuna scelta si ottiene un gruppo di $t-1$ punti indipendenti, per i quali passano $n-t+1$ blocchi di $K_{t,n}$. Di questi, $\binom{t-1}{t-3} s_{t-1}$ segano f in esattamente $t-1$ punti, onde

$$(8) \qquad s_{t-3} = \binom{n-2}{t-3}(n-t+1) - \binom{t-1}{t-3} s_{t-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(t-3)!\,.$$

Così proseguendo (fino alla considerazione di zero punti di H), si trova:

$$(9) \qquad s_i = \binom{n-2}{i}(n-i-2)\cdots(n-t+1) - \sum_{k=i+1}^{t-1} \binom{k}{i} s_k \quad (i=t-1,\cdots,1,0).$$

Le (7), (4), (8) provano che, per $i = t-1, t-2, t-3$, le (5), (6) sono verificate; possiamo dunque procedere per induzione decrescente rispetto ad i, supponendo vere le (5), (6) per valori k dell'indice maggiori di i ($i \geq t-4$), dimostrandone la validità per il valore i. Dalla (9) e dall'ipotesi induttiva si ha:

$$s_i = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/i! - \sum_{h=i+1}^{t-1} k(k-1)\cdots(k-i+1)/i!\,\cdot$$

$$\cdot\, a_k(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/k! =$$

$$= (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/i!\left(1 - \sum_{k=i+1}^{t-1} a_k/(k-i)!\right) =$$

$$= (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/i!\left(1 - \sum_{h=1}^{t-i-1} a_{i+h}/h!\right),$$

come asserito.

Ad esempio si trova:

$$a_{t-1} = 1\,,\ a_{t-2} = 0\,,\ a_{t-3} = 1/2\,,\ a_{t-4} = 1/3\,,\ a_{t-5} = 3/8\,,\ a_{t-6} = 11/30\,,\ \cdots$$

ed inoltre:

$$s_{t-1} = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(t-1)!\,,\quad s_{t-2} = 0\,,$$

$$s_{t-3} = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(2(t-3)!)\,,$$

$$s_{t-4} = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(3(t-4)!)\,,$$

$$s_{t-5} = 3(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(8(t-5)!)\,,$$

$$s_{t-6} = 11(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1)/(30(t-6)!).$$

Avuto riguardo a [3, p. 253], dalla B si trae la seguente significativa proprietà:

C - *Nell'espressione* (1), *al termine* s *può venir sostituito il valore* s_0 *dato dalle* (5), (6) *cioè*

$$s = s_0 = a_0(n-2)(n-3)\cdots(n-t+1),$$

ove a_0 *denota il numero razionale definito induttivamente dalle* (6).

In particolare:

Per una $K_{4,n}$ *risulta*: $s_3 = (n-2)(n-3)/6$, $s_2 = 0$, $s_1 = (n-2)\cdot(n-3)/2$, *e*

$$s = s_0 = (n-2)(n-3)/3. \tag{10}$$

3. Per una $K_{4,n}$, i calcoli indicati in [3, n. 7.6] conducono ai seguenti valori (dove N denota il numero dei blocchi di $K_{4,n}$ ed N_i quello dei blocchi di $K_{4,n}$ i–secanti un blocco comunque fissato di $K_{4,n}$):

$$N = n(n-1)(n-2)(n-3), \quad N_3 = n(n-1)(n-2)(n-4)/6,$$
$$N_2 = n(n-1)(n-3)/2,$$
$$N_1 = N - 2N_2 - 3N_3 - n, \quad N_0 = N - N_1 - N_2 - N_3 - 1 = N_2 - 2N_3 + n - 1,$$

e quindi

$$N_0 = n(n-1)(n-3)/2 + n(n-1)(n-2)(n-4)/3 + n - 1,$$

cioè:

$$N_0 = (n-1)(n(n-3)/2 + n(n-2)(n-4)/3 + 1). \tag{11}$$

Sia f un fissato blocco di $K_{4,n}$ ed (A, B) una coppia di punti di 1° tipo rispetto ad f, tale cioè che i generatori uscenti da A e da B incontrino f complessivamente in quattro punti distinti. Allora, detto r_i il numero dei blocchi di $K_{4,n}$ passanti per A e per B ed i–secanti f, svolgendo per $t = 4$ i calcoli indicati in [3, n. 7.7], si trova:

$$\sum_{i=0}^{3} r_i = (n-2)(n-3), \quad r_2 = (n-4)(n-5)/2 - 3r_3,$$
$$r_1 = 2(n-4) + 3r_3, \quad r_1 + r_2 = (n-1)(n-4)/2,$$
$$r_0 + r_3 = (n^2 - 5n + 8)/2. \tag{12}$$

A priori, ciascun numero r_i dipende dalla terna (f, A, B); attualmente, però, interessa determinare un numero r dipendente soltanto da n (per esempio quello che figura nella (1)), tale che risulti $r_0 = r_0(A, B) \geq r$ per ogni f ed ogni coppia (A, B) di 1° tipo. In base alla (12), interessa dunque determinare un numero M, tale che risulti $r_3 = r_3(A, B) \leq M$ per ogni f ed ogni coppia (A, B) di 1° tipo. Orbene, è evidente (cfr. [3, pp. 244–245]) che, se $\varphi(n-4)$ denota il massimo numero di terne (non ordinate) estraibili da un insieme di $n-4$ elementi con la condizione che due terne distinte abbiano in comune al più un elemento, risulta:

$$r_3(A, B) \leq \varphi(n-4). \tag{13}$$

Al riguardo è anche noto il seguente risultato (cfr. J. D. Swift [4]):

IV – *Il* massimo *numero* $\varphi(k)$ *di terne non bisecantisi (e non ordinate) effettivamente estraibili da un insieme di k oggetti vale*

$$\varphi(k) = \begin{cases} [[(k-1)/2]\,k/3] & \text{se } k \not\equiv 5 \pmod 6 \\ [[(k-1)/2]\,k/3] - 1 & \text{se } k \equiv 5 \pmod 6. \end{cases} \tag{14}$$

Dalle (12), (13) segue che

$$r_0 \geq (n^2 - 5n + 8)/2 - \varphi(n-4),$$

onde il valore

$$r = (n^2 - 5n + 8)/2 - \varphi(n-4) \tag{15}$$

risulta, per il teorema IV, il migliore possibile ai fini della (1).

Si supponga ora che esista una rete $K_{4,n}$; ciò implica (per la II)

$$n - 4 \equiv \pm 1 \pmod 6, \tag{16}$$

talché la (15) diviene (in forza della (14))

$$r = (n^2 - 5n + 8)/2 - [[(n-5)/2]\,(n-4)/3] + \varepsilon \tag{17}$$

$$\text{con } \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } n-4 \equiv 1 \pmod 6 \\ 1 & \text{se } n-4 \equiv -1 \pmod 6. \end{cases}$$

Si osservi che, nella (17): $[(n-5)/2] = (n-5)/2$, a norma della (16), e che, se $n-4 \equiv 1 \pmod 6$, risulta $[[(n-5)/2]\,(n-4)/3] = (n-5)\,(n-4)/6$; la (17) porge quindi:

$$r = (n-1)\,(n-2)/3 \qquad \text{se} \quad n-4 \equiv 1 \pmod 6 \tag{18}$$

$$r = (n^2 - 5n + 10)/2 - [(n-5)\,(n-4)/6] \quad \text{se } n-4 \equiv -1 \pmod 6. \tag{19}$$

4. Possiamo ormai dimostrare il teorema A, distinguendo per semplicità espositiva i due casi $n-4 \equiv \pm 1 \pmod 6$.

Se $n-4 \equiv 1 \pmod 6$, allora, in virtù di quanto precede, si può riscrivere la (1) ponendovi in luogo di N_0, s ed r i valori dati rispettivamente dalle (11), (10), (18), il che fornisce: $(n-3)\,(n-1)\,(n\,(n-3)/2 + n\,(n-2)\,(n-4)/3 + 1) + (n-1)\,(n-2) \cdot (n-3)/3 \geq (n-1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)/3$. Dividendo i due membri per il fattore positivo $(n-1)\,(n-3)/6$ si ottiene $n^2 - 7n + 10 \geq 0$, cioè finalmente la (2):

$$(n-2)\,(n-5) \geq 0;$$

questa, come asserito, non offre alcuna condizione effettiva in quanto risulta $n \geq 7$ (essendo $K_{4,n}$ non banale per ipotesi).

Se $n-4 \equiv -1 \pmod 6$, allora, in virtù di quanto sopra, si può riscrivere la (1) ponendovi in luogo di N_0, s ed r i valori dati rispettivamente dalle (11), (10), (19), il che fornisce

$$(n-3)\,(n-1)\,(n\,(n-3)/2 + n\,(n-2)\,(n-4)/3 + 1) + (n-1) \cdot$$
$$\cdot\,(n-2)\,(n-3)/3 \geq (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,((n^2 - 5n + 10)/2 -$$
$$-\,[(n-5)\,(n-4)/6]).$$

Dividendo i due membri per il fattore positivo $(n-1)(n-3)/6$ si ottiene $n^3 - 12n^2 + 51n - 62 \leq 6(n-2)[(n-5)(n-4)/6]$ cioè, successivamente

$$(n-2)(n^2-10n+31) \leq 6(n-2)[(n-5)(n-4)/6]$$

$$n^2-10n+31 \leq 6[(n-5)(n-4)/6];$$

quest'ultima è appunto la (3):

$$n^2-10n+31 \leq 6[(n^2-9n+20)/6]. \tag{20}$$

D'altra parte è ovvio che:

$$n^2-9n+15 \leq 6[(n^2-9n+20)/6] \leq n^2-9n+20, \tag{21}$$

talché, se

$$n^2-10n+31 \leq n^2-9n+15, \tag{22}$$

la (20) è certamente soddisfatta.

Orbene, se $n \geq 16$, la (22) – e quindi la (20) – è chiaramente verificata; restano soltanto da esaminare i casi in cui $n (= 6k+3)$ valga 9 o 15.

Nel caso $n = 9$, la (20) porge: $22 \leq 18$, talché $\nu_{4,9} = 0$, ossia non esiste alcuna $K_{4,9}$ (il che era già stato direttamente stabilito da B. Segre [3, p. 256]).

Nel caso $n = 15$, la (20) porge: $106 \leq 108$; pertanto, dalla (1) non può dedursi la non esistenza di alcuna $K_{4,6k+3}$ con $k > 1$, il che completa la dimostrazione del teorema A.

In conclusione, per l'esistenza di reti non banali $K_{4,n}$ (cioè di insiemi strettamente 4-transitivi su n lettere) si hanno le condizioni $n - 4 \equiv \pm 1 \pmod 6$, che sono *necessarie* ma non sufficienti (perché $\nu_{4,9} = 0$). Altre condizioni esplicite – diverse dalla $n \neq 9$ – non sono a tutt'oggi conosciute, e sarebbe interessante di ottenerne qualcuna.

Bibliografia.

[1] Ceccherini P. V., *Alcune osservazioni sulla teoria delle reti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) *40*, (1966) 218–221.

[2] Pedrini C., *Gruppi transitivi di sostituzioni e t-reti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) *40*, (1966) 226–232.

[3] Segre B., *Istituzioni di geometria superiore* (Anno accad. 1963–64), Lezioni raccolte da P. V. Ceccherini, vol. III, Roma, Istituto Matematico « G. Castelnuovo », 1965).

[4] Swift. J. D., *Quasi-Steiner systems*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) *44* (1968) 40–44.