
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

DEMETRIO MANGERON, MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI

**Su alcuni problemi concernenti le equazioni
integro-differenziali ordinarie ad argomento
ritardato. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.4, p. 497–501.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_4_497_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Su alcuni problemi concernenti le equazioni integro-differenziali ordinarie ad argomento ritardato.* Nota I di DEMETRIO MANGERON (*) e MEHMET NAMIK OĞUZOĞLU (**), presentata (***) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Various systems of ordinary integro-differential equations with delayed arguments of the form (1), (2); (6), (7), and (12), (13) are considered and solutions are established by the method of successive approximations and by the Picone method of strips. Certain related perturbation problems are also discussed.

1. Gli schemi matematici dei fenomeni fisici si sono sviluppati in un numero cospicuo di direzioni tra cui quella spettante alle equazioni ad argomento ritardato si è rigogliosamente sviluppata in questi ultimi anni grazie ai lavori di C. Corduneanu [1], L. E. El'sgoltz [2], A. Halanay [3], L. E. Krivoscein [4], D. Mangeron [5], A. D. Myskis [6], S. B. Norkin [7], M. N. Oğuztörelî [8], E. Pinni [9] ed altri ancora.

In ciò che segue gli Autori enunciano i seguenti teoremi concernenti lo studio delle equazioni integro-differenziali ordinarie con argomento ritardato rimandando il lettore per gli sviluppi algoritmici ed altri aspetti del soggetto ad un loro articolo di prossima pubblicazione nelle pagine del *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iaşi* (1).

2. Si consideri il sistema integro-differenziale

$$(1) \quad y'_k = F_k \left\{ x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x); y_1(\alpha_1(x)), y_2(\alpha_1(x)), \dots, y_n(\alpha_1(x)); \right. \\ \left. \dots; y_1(\alpha_p(x)), y_2(\alpha_p(x)), \dots, y_n(\alpha_p(x)); y'_1(\alpha_1(x)), y'_2(\alpha_1(x)), \dots, y'_n(\alpha_1(x)); \right. \\ \left. \dots; y'_1(\alpha_p(x)), y'_2(\alpha_p(x)), \dots, y'_n(\alpha_p(x)); \int_a^x \mathcal{H}_k[x, t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); \right.$$

(*) Istituto Politecnico di Iaşi, Romania. Attualmente in qualità di « Visiting Professor » nell'University of Alberta, Department of Mathematics, Edmonton, Alberta, Canada. The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(**) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(***) Nella seduta del 9 marzo 1968.

(1) Sottolineiamo che l'esposizione di vari aspetti attinenti alla presente Nota trovasi con le dovute estensioni nelle tesi di laurea tutt'ora in elaborazione dovute a K. B. Barataliev [10] e T. Amankulov [11], conseguite sotto la guida del Prof. L. E. Krivoscein e contenenti le dovute citazioni dei lavori degli AA.

$$\begin{aligned}
& y_1(\alpha_1(t)), y_2(\alpha_1(t)), \dots, y_n(\alpha_1(t)); \dots; y_1(\alpha_p(t)), y_2(\alpha_p(t)), \dots, y_n(\alpha_p(t)); \\
& y'_1(\alpha_1(t)), y'_2(\alpha_1(t)), \dots, y'_n(\alpha_1(t)); \dots; y'_1(\alpha_p(t)), y'_2(\alpha_p(t)), \dots, y'_n(\alpha_p(t))] dt \equiv \\
& \equiv F_k \{x, y_v(x), y_v(\alpha_j(x)), y'_v(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{H}_k[x, t, y_v(t), y_v(\alpha_j(t)), y'_v(\alpha_j(t))] dt\}, \\
& (k, v = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p),
\end{aligned}$$

ove le funzioni incognite $y_k(x)$ soddisfano alle condizioni

$$(2) \quad y_k^{(i)} = \varphi_k^{(i)}(x) \quad (i = 0, 1; k = 1, 2, \dots, n), \quad \text{per } x \in E_a = \cup E_j$$

e ove si è posto

$$E_j = \{x \geq a; \alpha_j(x) \geq a\}.$$

In ciò che riguarda le funzioni note che figurano nelle equazioni (1), si fanno le supposizioni seguenti:

a) Le funzioni di ritardo $\alpha_j(x) \leq x$ ($j = 1, 2, \dots, p$) sono continue per $x \in [a, b]$;

b) Le funzioni F_k sono continue nei loro argomenti nel dominio

$$(3) \quad \mathfrak{D} = \left\{ a \leq x \leq b, \sum_{i=0}^1 \sum_{v=1}^n |y_v^{(i)}(x)| \leq H, |\gamma_k(x)| \leq H \right\},$$

$$\gamma_k(x) = \int_a^x \mathcal{H}_k[x, t, y_v(t), y_v(\alpha_j(t)), y'_v(\alpha_j(t))] dt$$

ed ivi lipschitziane;

c) Le funzioni $\mathcal{H}_k$ sono continue pur esse nei loro argomenti nel dominio

$$(4) \quad \mathfrak{D}_1 = \left\{ a \leq x \leq t \leq b, \sum_{i=0}^1 \sum_{v=1}^n |y_v^{(i)}(x)| \leq H \right\}$$

ed ivi lipschitziane, le condizioni di lipschitzianità trascrivendosi come segue

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \left| F_k \left\{ x, y_v(x), y_v(\alpha_j(x)), y'_v(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{H}_k[x, t, y_v(t), y_v(\alpha_j(t)), y'_v(\alpha_j(t))] dt \right\} - \right. \\
& \left. - F_k \left\{ x, z_v(x), z_v(\alpha_j(x)), z'_v(\alpha_j(x)), \int_a^x \mathcal{H}_k[x, t, z_v(t), z_v(\alpha_j(t)), z'_v(\alpha_j(t))] dt \right\} \right| \leq \\
& \leq \sum_{v=1}^n \left\{ L_{0vk}(x) |y_v(x) - z_v(x)| + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^p L_{jvk}^i(x) |y_v^{(i)}(\alpha_j(x)) - z_v^{(i)}(\alpha_j(x))| + \right. \\
& \left. + \int_a^x \left[M_{0vk}(x, t) |y_v(t) - z_v(t)| + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^p M_{jvk}(x, t) |y_v^{(i)}(\alpha_j(t)) - z_v^{(i)}(\alpha_j(t))| \right] dt \right\}.
\end{aligned}$$

Supponiamo inoltre che ha luogo l'ineguaglianza

$$\sum_{k,v=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^p L_{jvk}(x) + \int_a^x \left[L_{0vk}(x) + \sum_{j=1}^p (L_{jvk}^0(x) + L_{jvk}^1(x) + M_{jvk}^1(x, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t \left[M_{0vk}(x, t) + \sum_{j=1}^p (M_{jvk}^0(x, t) + M_{jvk}^1(t, \tau)) \right] d\tau \right] dt \right\} < 1, \quad x \in \{a, b\}.$$

È valido il seguente

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi di più sopra il problema (1), (2) possiede nell'intervallo $[a, a+h]$ una soluzione unica continuamente differenziabile, che può essere costruita mediante il metodo delle approssimazioni successive. Tale soluzione inoltre dipende continuamente dalle piccole perturbazioni delle funzioni note F_k , $\mathfrak{K}_k$ e $\alpha_j(x)$, $\varphi_k^{(i)}(x)$ che figurano nelle (1), (2).*

3. Si consideri ora l'equazione integro-differenziale ad argomento ritardato

$$(6) \quad y'(x) = f[x, y(x), y'(\alpha(x))] + \int_a^x \mathfrak{K}[x, t, y(\alpha(t)), y'(\alpha(t))] dt$$

con le condizioni per la funzione incognita $y(x)$:

$$(7) \quad y^{(i)}(x) = 0 \quad (i = 0, 1) \quad , \quad x \in E_a \quad , \quad f[a, 0, 0] = 0,$$

ove le funzioni note f e $\mathfrak{K}$ sono definite rispettivamente nei domini $\overline{\mathfrak{D}}$ e $\overline{\mathfrak{D}}_1$ che se ne deducono particolarizzando in modo adatto i domini (3) e (4), sono continue in x e t e analitiche in $y^{(i)}(i = 0, 1)$, hanno luogo cioè gli sviluppi

$$(8) \quad f[x, y(x), y'(\alpha(x))] \equiv \sum_{k,j=0}^{\infty} A_{kj}(x) [y(x)]^k [y'(\alpha(x))]^j, \\ \mathfrak{K}[x, t, y(\alpha(t)), y'(\alpha(t))] \equiv \sum_{k,j=0}^{\infty} B_{kj} [y(\alpha(t))]^k [y'(\alpha(t))]^j.$$

Si ha inoltre

$$(9) \quad \max_{\overline{\mathfrak{D}}} \left| \frac{\partial f[x, y(x), y'(\alpha(x))]}{\partial y'(\alpha(x))} \right| = q < 1.$$

Ha luogo il seguente

TEOREMA 2. *La serie*

$$(10) \quad z(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots,$$

ove $z(x)$ è soluzione dell'equazione « perturbata »

$$(11) \quad z'(x) = f[x, \lambda z(x), \lambda z'(x)] + \int_a^x \mathfrak{K}[x, t, \lambda z(\alpha(t)), \lambda z'(\alpha(t))] dt$$

dell'equazione (6), è convergente nel dominio

$$g = \{-1 \leq \lambda \leq 1, a \leq x \leq b\}$$

e soluzioni approssimative del problema (6), (7) se ne ricavano, prendendo, per $\lambda = 1$, varie somme parziali della serie (10).

Altre formulazioni del processo iterativo presentato nell'ambito del Teorema 2 si hanno utilizzando un recente lavoro dovuto a H. Knapp [12] e consacrato all'elaborazione di un processo generale iterativo per la ricerca di soluzioni dei sistemi differenziali.

4. In un lavoro dovuto al primo degli AA. consacrato allo studio dei problemi di unicità, esistenza e determinazione delle soluzioni delle equazioni di tipo «composito» secondo Hadamard [13] si è fatto uso dovuto del *metodo delle striscie* connesse alle date, escogitato dall'insigne Maestro M. Picone [14].

Applicando il metodo delle striscie all'equazione integro-differenziale lineare con argomento ritardato

$$(12) \quad y'(x) = f(x) + \int_0^1 [\mathfrak{K}_0(x, t) y(t) + \mathfrak{K}_1(x, t) y'(\alpha(t))] dt,$$

ove $y(x)$ è sottoposta alle condizioni

$$(13) \quad y^{(i)}(x) \equiv 0 \ (i = 0, 1), x \in E_0, y'(0) = f(0) = 0,$$

e le funzioni $\alpha(x) \leq x, f(x), \mathfrak{K}_0(x, t), \mathfrak{K}_1(x, t)$, sono date, continue per $0 \leq x, t \leq 1, \mathfrak{K}_0(x, t) \equiv \mathfrak{K}_1(x, t) \equiv 0, x \in E_0$ mentre l'unità non è un autovalore del nucleo

$$(14) \quad \mathfrak{K}_1(x, t) + \int_t^1 \mathfrak{K}_0(x, \tau) d\tau \equiv \mathfrak{K}_1(x, t) + \mathfrak{K}_2(x, t)$$

e

$$(15) \quad P = \max_{[0,1]} \int_0^1 [|\mathfrak{K}_1(x, t)| + |\mathfrak{K}_2(x, t)|] dt \geq 1,$$

si possono determinare per via algebrica i funzionali incogniti E_i che compaiono nell'equazione

$$(16) \quad \begin{aligned} z(x) = f(x) + \int_0^1 [M_1(x, t) z(t) + M_2(x, t) z(\alpha(t))] dt + \\ + \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) E_i \equiv f(x) + M[z] + \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) E_i, \end{aligned}$$

che sostituisce il sistema (12), (13) non appena si fa un'apposita scelta dell'operatore $M(z)$.

Si osserva, in fine, che il caso $P < 1$ è molto più semplice.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. CORDUNEANU, *Théorèmes d'existence globale pour les systèmes différentiels à argument retardé*. Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations, vol. II, 1961, pp. 195-201, « Izdat. Akad. Nauk. Ukrain. SSR », Kiev 1963.
- [2] L. E. EL'SGOLTZ, *Vvedenie v teoriju differentsial'nyh uravnenii s otkloniajustchimsia argumentom* (Introduzione della teoria delle equazioni differenziali con argomento ritardato). Izdat. « Nauka », M. 1964.
- [3] A. HALANAY, *Teoria ustoitchivosti lineinyh periodicheskikh sistem s zapazdyvaniem* (Teoria della stabilità dei sistemi lineari periodici con argomento ritardato), « Revue math. pures et appl., Acad. R. P. R. », 6, 4, 633-653 (1961).
- [4] L. E. KRIVOSCEIN e D. MANGERON, *Sistemi policalorici a rimanenza ed ad argomento ritardato. I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 35, 1-24 (1965).
- [5] D. MANGERON, *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati*. Nota I, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. », s. VIII, XXXIX, 1-2, 22-28 (1965).
- [6] A. D. MYSKIS, *Obstaia teorii differentsial'nyh uravnenii s zapazdyvaiustchim argumentom* (Teoria generale delle equazioni differenziali con argomento ritardato), « Uspehi Mat. Nauk », 45, 99-141 (1949).
- [7] S. B. NORKIN e collab., *Differentsial'nye uravnenia s otkloniajustchimsia argumentom* (Equazioni differenziali con argomento ritardato). « Uspehi Mat. Nauk », 17, I (1962).
- [8] M. N. OĞUZTÖRELİ, *Time-Lag Control Systems*, « Academic Press », New York and London, 8, 323 p. (1966).
- [9] E. PINNI, *Equazioni differenziali ordinarie*. Zanichelli, Bologna 1960.
- [10] K. B. BARATALIEV, *Priblizhennoe resenie kraevykh zadach dlia nekotorykh sistem integro-differentsial'nyh uravnenii* (Risoluzione approssimativa dei problemi al contorno per certi sistemi integro-differenziali con argomento ritardato). Tesi di Laurea (in stampa) Frunze, Kirg. SSR.
- [11] T. AMANKULOV, *Priblizhennoe resenie integro-differentsial'nyh uravnenii neitral'nogo tipa s zapazdyvaiustchim argumentom* (Risoluzione approssimativa delle equazioni integro-differenziali di tipo neutro con argomento ritardato). Tesi di Laurea (in stampa). Frunze, Kirg. SSR, Akad. Nauk.
- [12] H. KNAPP, *Bemerkung zu Iterationsmethoden bei Differentialgleichungen*, « Computing », 2, 1, 154-158 (1966).
- [13] D. MANGERON, *Sopra le equazioni del tipo « composito » secondo Hadamard*, « Boll. Un. Mat. Ital. », s. II, 2, 18-25 (1939).
- [14] M. PICONE, *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », 5, s. 2-a, 213-288 (1936).