

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

CLIFFORD TRUESDELL

**Sulle basi della termodinamica delle miscele**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.3, p. 381–383.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1968\\_8\\_44\\_3\\_381\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_381_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Meccanica razionale.** — *Sulle basi della termodinamica delle miscele* (\*). Nota di CLIFFORD TRUESDELL, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — The author's method of 1957 is applied so as to derive the general Clausius-Duhem inequality for mixtures, independent of equations of state or other constitutive assumptions.

1. *Posizione del problema.* — Sebbene molti autori si siano occupati della termodinamica delle miscele basata su una disuguaglianza che dovrebbe estendere ai mezzi eterogenei quella di Clausius e Duhem per i mezzi semplici, purtroppo non sembra che sia stato ancora raggiunto un consenso unanime sulle relazioni fra il flusso totale dell'entropia ed i flussi delle entropie dei componenti (1).

In due Note (2) pubblicate in questi Rendiconti undici anni or sono, ho costruito un'armatura generale per esprimere gli scambi di massa, di impulso, e di energia nella termomeccanica delle miscele, ma venendo alla parte termodinamica, mi sono limitato, in mancanza di meglio, alle considerazioni basate sulle cosiddette equazioni di stato (§§ 9-12).

Ora che si sa qual'è la vera termodinamica, indipendentemente dagli assiomi di carattere costitutivo, non mi sembra fuori del giusto indicare nella Nota attuale come si costituisce la disuguaglianza generale per le miscele, sempre seguendo le linee da me indicate per la termomeccanica, e cioè:

1) Per descrivere il moto di un componente, lo si può immaginare isolato da tutti gli altri, purché siano ben prese in considerazione tutte le azioni esercitate su esso dagli altri componenti.

2) Ogni proprietà del movimento medio è conseguenza matematica delle proprietà dei componenti.

3) Le equazioni che reggono il moto medio della miscela coincidono con le equazioni che reggono il moto di un mezzo semplice.

(\*) Lavoro eseguito coll'aiuto di una cessione dalla U. S. National Science Foundation alla Johns Hopkins University.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1968.

(1) La prima teoria soddisfacente della termodinamica delle miscele di fluidi viscosi (anche lineari) è stata esposta recentemente da I. MÜLLER, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 28, 1-39 (1968). In questa memoria si trova anche una critica di altre teorie proposte. Le ipotesi del prof. Müller sono tali da permettergli di evitare la necessità di precisare il ruolo delle entropie parziali.

(2) «Sulle basi della termodinamica I e II», questi Rendiconti, Ser. 8, vol. 22, 33-38, 158-166 (1957). L'analisi presentata in queste Note è stata estesa agli effetti elettromagnetici nei materiali eventualmente soggetti a coppie di contatto e dotati di impulso angolare interno da P. D. KELLY, *International Journal of Engineering Science*, 2, 129-153 (1964).

Poiché il metodo rimane precisamente quello delle mie Note precedenti, ed anche per evitare le ripetizioni inutili, conservo le notazioni di quelle Note e scrivo qui solo un nuovo paragrafo che potrebbe considerarsi da sostituire ai §§ 10-12 del mio lavoro <sup>(3)</sup> del 1957.

2. *Disuguaglianza calorica.* - Sia  $\eta_A$  il calorico (cioè, «l'entropia parziale specifica») del componente  $A$ , e siano  $\theta_A$  e  $\varphi_A$  le sue temperature rispetto alla conduzione ed alla radiazione <sup>(4)</sup>. Ammettiamo che  $\theta_A > 0$ ,  $\varphi_A > 0$ . Analogamente a (4.1), (6.1) e (7.1), definiremo la *rapidità calorica*  $\hat{\eta}_A$  del componente  $A$  mediante l'equazione

$$(1) \quad \rho \hat{\eta}_A = \rho_A \dot{\eta}_A - \operatorname{div} (\mathbf{h}_A / \theta_A) - \rho_A q_A / \varphi_A.$$

Con ciò  $\hat{\eta}_A \geq 0$  è condizione necessaria e sufficiente affinché agli effetti del suo calorico il componente  $A$  si comporti come se fosse isolato. Il calorico totale  $\eta$  risulta semplicemente come somma dei calorici parziali  $\eta_A$ :

$$(2) \quad \eta \equiv \sum_{A=1}^K c_A \eta_A.$$

Sommando la (1) sui componenti ed adoperando la (2) e le Eqq. (4.6), (6.6) e (7.9) delle mie Note già citate, si ottiene l'identità

$$(3) \quad \rho \dot{\eta} - \operatorname{div} \Phi - \rho s = \rho \sum_{A=1}^K (\hat{\eta}_A + \hat{c}_A \eta_A),$$

ove

$$(4) \quad \Phi \equiv \sum_{A=1}^K (\mathbf{h}_A / \theta_A - \rho_A \eta_A \mathbf{u}_A),$$

$$(5) \quad s \equiv \sum_{A=1}^K c_A q_A / \varphi_A,$$

da cui segue il

TEOREMA. *Affinché sia*

$$(6) \quad \rho \dot{\eta} \geq \operatorname{div} \Phi + \rho s,$$

*occorre e basta che*

$$(7) \quad \sum_{A=1}^K (\hat{\eta}_A + \hat{c}_A \eta_A) \geq 0.$$

(3) Il contenuto dei §§ 10-12, ove ci si limita alle conseguenze delle «equazioni di stato», rimane giusto, ma le dimostrazioni dovrebbero essere modificate secondo il punto di vista attuale. Ad esempio, la (10.4) non dovrebbe intendersi più come una definizione, ma risultare come conseguenza quando l'ipotesi costitutiva (10.3) si sostituisce nella disuguaglianza (6) nella Nota attuale.

(4) Per un mezzo semplice, la termodinamica con eventuali due temperature è stata costituita in modo assiomatico in una memoria elegante di M. E. GURTIN e W. WILLIAMS, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 26, 83-117 (1967).

La (6) è la *disuguaglianza di Clausius–Duhem per le miscele*. Secondo la (7), questa disuguaglianza si interpreta come segue:

la somma degli incrementi di calorico  $\hat{\eta}_A$  che derivano dallo sbilancio del calorico di un componente particolare, e dei caloric  $\hat{c}_A \eta_A$  risultanti dalla diffusione della massa creata dalle trasformazioni, deve essere non-negativa.

Si osservi che le forze di massa  $f_A$  non danno alcun contributo alla sorgente  $s$  del calorico totale, e che il flusso  $\Phi$  del calorico totale include non solo quello dovuto al flusso della energia, cioè  $h_A/\theta_A$ , ma anche quello dovuto al trasporto del calorico  $\eta_A$  mediante le correnti della diffusione.

Per interpretare i risultati, basta considerare il caso speciale in cui tutti i componenti hanno temperature comuni,  $\varphi_A = \varphi$  e  $\theta_A = \theta$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ . In tal caso, la (5) diventa coll'aiuto della (9.1)

$$(8) \quad \varphi s = q_1,$$

ove  $q_1$  è la sorgente interiore della energia interna totale. Se le forze di massa che agiscono sui componenti sono uguali fra loro, cioè  $f_A = f$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ , allora  $q_1 = q$ , la sorgente totale della energia interna totale, e la (8) si riduce alla formula proposta <sup>(5)</sup> da Toupin e da me nel 1960, cioè  $\varphi s = q$ .

Possiamo ugualmente paragonare il flusso calorico  $\Phi$  coi flussi  $h$  ed  $h_1$  della energia interna totale, definiti dalla (7.3) e dalla (9.1). Risulta

$$(9) \quad \begin{aligned} \theta \Phi &= h + \sum_{A=1}^K C_A^T u_A, \\ &= h_1 + \theta \sum_{A=1}^K \rho_A \eta_A u_A, \end{aligned}$$

ove

$$(10) \quad C_A = -T_A + \rho_A \left( \psi_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \mathbf{I}.$$

Se ogni componente è un fluido perfetto,  $T_A = -p_A \mathbf{I}$ , e dalla (10) segue

$$(11) \quad C_A = \rho_A \left( p_A / \rho_A + \psi_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \mathbf{I}.$$

Come ho dimostrato nel § 11 della mia Nota già citata, se  $u_A = \mathbf{0}$  il coefficiente del tensore  $\mathbf{I}$  nella (11) è il potenziale chimico del componente  $A$  secondo la termostatica classica. Quindi, possiamo riguardare la  $C_A$  nel caso generale come *il tensore del potenziale chimico* <sup>(6)</sup>, senza ricorrere ai concetti dell'equilibrio o delle « equazioni di stato ».

(5) Disuguaglianza (258.3) del trattato « The Classical Field Theories » « Handbuch der Physik », III/1, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer 1960.

(6) Un tensore  $k_A$  che generalizza il potenziale termodinamico è stato introdotto quale concetto primitivo nella teoria di R. M. BOWEN, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 24, 370–403 (1967), ma secondo le sue Eqq. (3.3), (4.4), (4.5) e (4.6) non sembra coincidere col mio  $C_A^T - \frac{1}{2} \rho_A u_A^2 \mathbf{I}$  se non nel caso speciale in cui valga la (11).