Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, M. N. Oğuztöreli

# Nuove equazioni della Meccanica analitica ed operatori differenziali d'ordine superiore

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **44** (1968), n.3, p. 375–380.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_375_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

**Meccanica razionale.** — *Nuove equazioni della Meccanica analitica ed operatori differenziali d'ordine superiore.* Nota di DEMETRIO MANGERON [(*)] e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELİ [(**)], presentata [(***)] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — After establishing some new equations of analytical dynamics describing holonomous, non-holonomous mechanical systems and impact phenomena, the authors present some classes of higher order differential operators and give applications to machine dynamics. The new equations give the possibility of a systematic presentation of analytical mechanics and of new properties of quadratic forms.

Dedico questo lavoro a Mauro Picone in occasione del conferimento a Lui dall'Università di Bucarest del titolo di Dottore honoris causa.

1. Si deve all'illustre Accademico Linceo Mauro Picone un contributo essenziale nel dominio spettante alla Balistica esterna [1]. Studi degli Autori [2]–[4], eseguiti nelle condizioni odierne con possibilità tecniche quasi illimitate, che permettono la realizzazione non solo di grandissime velocità oppure di variazioni sensibili di esse, e cioè di accelerazioni di intensità cospicue, ma anche di fortissime variazioni pressocché istantanee – specie nel caso dei lanci di razzi – delle accelerazioni ordinarie, mettendo in tal modo sul tappeto studi teorici e sperimentali concernenti il ruolo delle accelerazioni d'ordine superiore al primo, hanno costituito per parecchi scienziati il punto di partenza delle loro ricerche [5], [7].

In ciò che segue gli Autori, pur riservando un'apposita memoria da pubblicarsi nelle pagine del *Bollettino dell'Istituto politecnico di Iași* volta all'esposizione della teoria e pratica di varie classi di operatori differenziali d'ordine superiore, presentano nuove equazioni della Meccanica analitica olonóma ed anolonoma e fanno cenno alla problematica spettante agli operatori differenziali d'ordine qualunque da loro elaborata.

2. *Nuove equazioni della Meccanica analitica olonoma.*

Conservando qui le notazioni classiche utilizzate oramai da Luigi Lagrange in poi, sia

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}([q_i], [\dot{q}_i]; t) \quad , \quad \left(\bullet \equiv \frac{d}{dt}\right)$$

$$[q_i] \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_n), \ [\dot{q}_i] \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$$

(*) Istituto politecnico di Iași, Romania. Attualmente in qualità di « Visiting Professor » nell'University of Alberta, Department of Mathematics, Edmonton, Alberta, Canada. The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(**) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(***) Nella seduta del 9 marzo 1968.

l'energia cinetica di un sistema meccanico soggetto ai legami olonomi con $n$ gradi di libertà.

Supponendo che l'ordine della derivazione dell'energia cinetica e delle coordinate generalizzate (lagrangiane) rispetto al tempo non sia soggetto a restrizione alcuna, nel senso cioè che i simboli

$$\dot{T}\,,\ddot{T}\,,\cdots,T^{(m)}\,,\cdots,\dot{q}_i\,,\ddot{q}_i\,,\cdots,q_i^{(m)}\,,\cdots;$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_i}\,,\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_i}\,,\cdots,\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}}\,,\cdots$$

$$(i=1\,,2\,,\cdots,n\,;m=1\,,2\,,\cdots)$$

abbiano significato, abbiamo stabilito, ed anzi ne abbiamo fatto oramai da molto tempo in alcuni casi interessanti la pratica varie applicazioni [8]–[9], la validità delle seguenti equazioni della Meccanica analitica olonoma

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}}-\frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1\,,2\,,\cdots,n\,;m=1\,,2\,,\cdots) \tag{1}$$

$$T^{(m)}\equiv\frac{d}{dt}T^{(m-1)}\,,\quad q_j^{(m)}\equiv\frac{d}{dt}q_j^{(m-1)}\,,$$

ove $Q_j\equiv\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$ sono forze generalizzate applicate ad esso sistema.

Sia $T_0$ l'espressione dell'energia cinetica T in cui soltanto le coordinate $[q_i]$ ed il tempo $t$ sono considerati variabili. Poiché si ha ovviamente

$$\frac{\partial T_0^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}}=\frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j=1\,,2\,,\cdots,n\,;m=1\,,2\,,\cdots)$$

le equazioni (1) assumono la forma

$$\frac{\partial R_m}{\partial q_j^{(m)}}=Q_j \qquad (j=1\,,2\,,\cdots,n\,;m=1\,,2\,,\cdots), \tag{2}$$

ove si è posto

$$R_m=\frac{1}{m}\left[T^{(m)}-(m+1)\,T_0^{(m)}\right] \qquad (m=1\,,2\,,\cdots). \tag{3}$$

3. *Nuove equazioni della Meccanica analitica anolonoma.*

Supponiamo, per rispondere ai fatti che si incontrano più spesso nelle applicazioni, che si tratti soltanto di sistemi anolonomi soggetti ai legami *lineari* non integrabili (rispetto a $q_j$):

$$\dot{q}_r=\sum_{\alpha=1}^{k}a_{r\alpha}\,\dot{q}_\alpha+a_r \qquad (r=k+1\,,k+2\,,\cdots,k+p=n), \tag{4}$$

ove i coefficienti $a_{r\alpha}$ ed $a_r$ sono funzioni di $t$ e, rispettivamente, delle $[q_\alpha]\equiv(q_1\,,q_2\,,\cdots,q_k)$ e delle $[q_r]=(q_{k+1}\,,q_{k+2}\,,\cdots,q_{k+p})$.

In seguito alla validità delle eguaglianze

$$\delta q_r = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{r\alpha}\,\delta q_\alpha \quad , \quad q_r^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=1}^{m-1} C_m^i\, a_{r\alpha}^{(m-i)}\, q_\alpha^{(i+1)} + a_r^{(m)}$$

$$\partial q_r^{(m)}/\partial q_\alpha^m = a_{r\alpha} = \partial\delta q_r/\partial\delta q_\alpha \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

e nell'ipotesi della permutabilità degli operatori d$\delta$ e $\delta$d ecc., e cioè d$\delta$ = $\delta$d ecc., si perviene alle seguenti equazioni della Meccanica analitica anolonoma

$$\frac{\partial R_m}{\partial q_\alpha^{(m)}} + \sum_{r=k+1}^{k+p=n} \frac{\partial R_m}{\partial q_r^{(m)}}\,\frac{\partial q_r^{(m)}}{\partial q_\alpha^{(m)}} = P_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k), \tag{5}$$

ove si è messo

$$P_\alpha = Q_\alpha + \sum_{r=k+1}^{k+p=n} Q_r\, a_{r\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k). \tag{6}$$

4. *Nuove equazioni della Meccanica analitica degli urti.*

Si perviene alle nuove equazioni della Meccanica analitica degli urti (Meccanica collisiva) prendendo le mosse dall'equazione

$$\frac{1}{m}\,\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\,\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \tag{7}$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{\vec{p}_{sj}\,\dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}}{(\lambda-a)^2\left[\exp\left(\dfrac{t-\tau_j}{\lambda-a}\right)^2 + \exp\left(-\dfrac{t-\tau_j}{(\lambda-a)^2}\right) + 2\right]},$$

ove $Q_i = \sum_{s=1}^{n} \vec{F}_s\,\dfrac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i}$, $\vec{p}_{sj}$ sono vettori costanti e si assume la validità dei simboli

$$\lim_{\lambda\to a} q_i^{(p)} = \omega_i^{(p)} \quad , \quad \lim_{\lambda\to a} \frac{1}{m}\,\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} = \frac{1}{m}\,\frac{\partial T_p^{(m)}}{\partial \omega_i^{(m)}} ,$$

$$\lim_{\lambda\to a} \frac{m+1}{m}\,\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{m+1}{m}\,\frac{\partial T_p}{\partial \omega_i} \qquad (p = 1, 2, \cdots, m\, ;\, i = 1, 2, \cdots, h\, ;\, t \neq \tau_j).$$

Tali equazioni risultano essere

$$\frac{1}{m}\,\frac{\partial T_p^{(m)}}{\partial \omega_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\,\frac{\partial T_p}{\partial \omega_i} = Q_i + \Gamma_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, h), \tag{8}$$

in cui $\vec{p}_{sj}$ sono gli urti prodotti nei momenti $t = \tau_j$,

$$\vec{r}_s = \vec{r}_s(t, q_i) \quad , \quad \lim_{\lambda\to a} \vec{r}_s = \vec{r}_{ps} \quad , \quad \lim_{\lambda\to a} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}_{ps}}{\partial \omega_i} , \tag{9}$$

$$\Gamma_i = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \vec{p}_{sj}\,\frac{\partial \vec{r}_{ps}}{\partial \omega_i}\,\delta(t-\tau_j)$$

e $\delta(t-\tau_j)$ è la funzione generalizzata di Dirac.

Il fatto dell'esistenza di nuove equazioni della Meccanica analitica (1), (5), (8), caratterizzate dalla presenza delle derivate totali rispetto al tempo dell'energia cinetica, coadiuvato dai risultati della recentissima tesi di laurea di uno dei pregiati allievi del primo degli Autori [10], dedicata all'elaborazione della Meccanica razionale prendendo come elemento primordiale invece del punto newtoniano il corpo solido (1), pare notevole – come hanno sottolineato parecchi scienziati come lo sono, ad esempio V. V. Dobronravov e B. Dolaptschiew durante alcuni recentissimi congressi di Meccanica teorica ed applicata – non solo per la possibilità di una nuova sistematica rielaborazione della Meccanica analitica, ma anche, tra l'altro, per l'indicazione delle vie atte a scoprire nuove proprietà differenziali delle forme quadratiche.

5. *Operatori differenziali d'ordine superiore.*

In una serie di nostri lavori anteriori [11]–[12] è stata introdotta la nozione di *accelerazione ridotta d'ordine n* definita, ad esempio, per un punto M situato su una retta (R) di versore $\vec{u}$ nell'atto di moto generale nello spazio, essendo $\vec{\omega}$ la sua velocità angolare, tramite

$$\vec{a}^{(n)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(n)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_n(\vec{u})} \quad , \quad \vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1(\vec{u})} \equiv \frac{\vec{a}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1(\vec{u})} \equiv \frac{\ddot{\vec{r}}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1(\vec{u})} ,$$

ove

$$\mathrm{A}_{n+1} = \frac{d\mathrm{A}_n}{dt} + \vec{\omega}\cdot\vec{\mathrm{B}}_n \quad , \quad \vec{\mathrm{B}}_{n+1} = \frac{d\vec{\mathrm{B}}_n}{dt} - \vec{\omega}\cdot\mathrm{A}_n \quad , \quad \vec{\mathrm{B}}_1 = \vec{\omega}^{(2)} ,$$

$$\mathrm{A}_1(\vec{u}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) \qquad \text{per} \quad \mathrm{A}_1 = (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) ,$$

$$\mathrm{A}_2(\vec{u}) = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) \qquad \text{per} \quad \mathrm{A}_2 = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega}) \quad \text{ecc.}$$

e tradotta tra l'altro nel dominio delle applicazioni nell'elaborazione del così detto *metodo delle accelerazioni ridotte* che permette un'agevole determinazione dei campi di accelerazioni nei meccanismi e nelle macchine.

In questo ordine di idee vale il seguente generale

TEOREMA. *Ogni varietà lineare $V_{n-k}$ dello spazio euclideo ad n dimensioni nell'atto di moto rigido generale e la varietà lineare $V_k$ – luogo delle estremità delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque dei punti della $V_{n-k}$ – determinano una croce generalizzata nel senso da noi introdotto* [13].

I risultati conseguiti nel dominio sono stati utilizzati poscia dai vari scienziati appartenenti a diversissimi paesi.

(1) Con questa occasione si è potuto sottolineare la vastissima portata dell'interpretazione fisica data ai vari enti differenziali dal nostro venerato Maestro M. Picone nella Sua oramai classica opera « Istituzioni di Analisi Matematica » (Catania, 1923), che fu anche l'origine della Sua geniale iniziativa – prima nel mondo – di far creare un istituto per le applicazioni del calcolo, il famoso INAC del CNR di oggidì.

6. *Applicazioni di alcuni operatori differenziali d'ordine superiore.* Studi sperimentali recenti condotti in vari paesi (vedasi ad esempio [14]) hanno messo in evidenza il ruolo delle accelerazioni d'ordine superiore (nella dinamica dei sistemi meccanici almeno di quelle d'ordine due). I nostri studi teorici nel dominio conducono, ad esempio, nel caso dello studio del meccanismo di biella–manivella alla seguente espressione per lo spostamento $\eta(\xi, t)$ nel sistema $A\xi\eta$ di un punto della biella, ove $a_A^t$ è la proiezione dell'accelerazione del centro A dell'articolazione della biella sull'asse $A\xi$ perpendicolare all'asse $A\xi$ della biella, $\ddot{\varphi}$ è l'accelerazione angolare dell'angolo che misura la rotazione del sistema di coordinate $A\xi\eta$, e $A_n$, $B_n$ ecc. sono certe costanti il cui significato non è il caso di dare costì:

$$\eta(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \beta_n t + B_n \sin \beta_n t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \frac{2l(-1)^{n-1}}{n\pi\beta_n^2} \left[ \ddot{\varphi} - \frac{\dddot{\varphi}}{\beta_n} \sin \beta_n t - \frac{\ddddot{\varphi}}{\beta_n^2} (1 - \cos \beta_n t) + \cdots \right] \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^m \frac{4}{(2m-1)\pi\beta_{2m-1}^2} \left[ a_A^t - \frac{\dot{a}_A^t}{\beta_{2m-1}} \sin \beta_{2m-1} t - \frac{\ddot{a}_A^t}{\beta_{2m-1}^2} (1 - \cos \beta_{2m-1} t) + \cdots \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi}{l} \xi \right\}.$$

## BIBLIOGRAFIA.

[1] MAURO PICONE, «Annuario dei XL» (1961).

[2] D. MANGERON, *Neue Methoden zum Studium der Getriebe und Maschinen.* III. «Allpolnische Konferenz der Getriebelehre», Rogow–Warszawa, Zusammenfassungen 1961.

[3] D. MANGERON, *K grafo–analiticeskim metodam kinematiki material'nyh sistem* (*Metodi grafici ed analitici nello studio dei sistemi meccanici*), «Doklady Akad. Nauk SSSR», *102*, *4*, 705–706; 897–898 (1955); *112*, *1*, 27–28 (1957); *148*, *1*, 53–56 (1963).

[4] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Tangential Method by studying Mechanisms*, Proc. XI Congress Theor. Appl. Mechanics, New Delhi, Dec. 1967, Abstracts of Papers.

[5] JOHN J. UICKER, JR., *Velocity and Acceleration Analysis of Spacial Mechanisms using 4 × 4 Matrices*, Northwestern University, Technological Institute, Evanston, Ill., Sept. 1963. Postgraduate Research Paper.

[6] CHANG TSY–SIANG, *Analysis and Synthesis of Spacial Mechanisms using 4×4 Matrices* (in lingua cinese). Doctoral Dissertation. Aviation Institute, Pekin 1962.

[7] IA. S. SILBERMAN, *Primenenie metoda redutzirovannyh uskorenii k issledovaniu ploskih mehanizmov* (*Applicazione del metodo delle accelerazioni ridotte allo studio dei meccanismi piani*), Trudy Rostovskogo na Donu Instituta Inzhenerov Zheleznodorozhnogo Transporta, *29*, 11–95 (1961).

[8] D. MANGERON, *O nekotoryh novyh aspektah analiticeskoi dinamiki* (*Su alcuni nuovi aspetti della dinamica analitica*), «Izvestia Akad. Ňauk SSSR», OTN, Mehanika i Masinostroienie, *2*, 128–129 (1962).

[9] D. MANGERON, *The Study of Machine Dynamics in the Light of a New Presentation of the Analytical Mechanics*, I. «Revue Roumaine Sci. Techn., sér. Méc. Appl.», *9*, *5*, 1063–1069 (1964).

[10] N. İRIMICIUC, *O noua prezentare a Mecanicii analitice, ca metoda curenta a Mecanicii tehnice* (*Una nuova presentazione della Meccanica analitica, come un corrente metodo spettante alla Meccanica tecnica*). Tesi di Laurea, Istituto Politecnico di Iași, 1967.

[11] D. MANGERON, *Problèmes de cinématique ponctuelle et tangentielle concernant la théorie des mécanismes et des machines*, «Revue Fac. Sci. Univ. d'Istanbul», s. A, *27*, 15–24 (1962).

[12] D. MANGERON, *Applicazioni del metodo delle accelerazioni ridotte nello studio dei meccanismi*, «Macchine», *5*, 171–176 (1963).

[13] D. MANGERON, *Novye metody issledovania mehanizmov i mașin* (*Nuovi metodi di studio dei meccanismi*), Vtozoe Vsesoiuznoe Sovescianie po osnovnym problemam teorii mașin i mehanizmov. Resume dokladov., Mosca 1958.