Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Petre Teodorescu

Problèmes bidimensionnels de la théorie de l'élasticité. II. Deux tensions tangentielles nulles

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 370–374.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_370_0>

Meccanica. — *Problèmes bidimensionnels de la théorie de l'élasticité. II. Deux tensions tangentielles nulles.* Nota di PETRE TEODORESCU, presentata [(*)] dal Socio D. GRAFFI.

RIASSUNTO. — Si considera il problema bidimensionale, definito nella Nota I [(1)], nel caso di due tensioni tangenziali (τ_{zx}, τ_{zy}) nulle; lo stato di tensione e lo stato di deformazione risultano espressi tramite una funzione biarmonica F_0 e due funzioni armoniche F_1 e F_2 in due variabili. Si considera anche qualche caso particolare interessante e si discutono varie questioni connesse al problema studiato.

1. – LE CAS DE DEUX TENSIONS TANGENTIELLES NULLES.

Dans le cadre des problèmes bidimensionnels, définies dans la Note I [(1)], on va considérer le cas où deux tensions tangentielles sont nulles, notamment

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \tag{1}$$

Les tensions normales seront exprimées par

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

$$\sigma_z = F_2 + \frac{1}{4} C (x^2 + y^2) \tag{2'}$$

et la tension tangentielle sera donnée par

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}, \tag{2''}$$

où la fonction de tension $F = F(x, y, z)$ vérifie l'équation

$$\Delta\Delta F = -(2 + \mu) C, \tag{3}$$

étant de la forme

$$F = - \frac{\mu}{2(1+\mu)} z^2 \Delta F_0 + \frac{1}{2(1+\mu)} z^2 F_2 + z F_1 + F_0 - \\ - \frac{1}{8} (1 + \mu) C z^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{4} k z (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{64} C (x^2 + y^2)^2. \tag{4}$$

La fonction $F_0 = F_0(x, y)$ est biharmonique

$$\Delta\Delta F_0 = 0 \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

(1) « Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat. », serie VIII, XLIV, fasc. 2 (1968).

et les fonctions $F_1 = F_1(x, y)$, $F_2 = F_2(x, y)$ sont harmoniques

$$\Delta F_1 = \Delta F_2 = 0, \tag{6}$$

de la classe C^4; C et k sont des constantes arbitraries et μ est le coefficient de contraction transversale de Poisson. La représentation donnée est *complète* (on l'a obtenue en partant des équations différentielles du problème et en suivant le calcul pas à pas, jusqu'à la forme finale).

L'état de déplacement peut être calculé aisément, comme dans le cas d'un état de tension plane.

Ces résultats peuvent être mises en liaison avec l'étude de G. Supino (cfr. [2]) sur les systèmes élastiques en deux dimensions; on y a considéré la fonction $F = F(x, y)$ (seulement en deux variables) pour la représentation (2), (2'').

2. – LE CAS D'UN ÉTAT DE DÉFORMATION INCOMPRESSIBLE.

Dans le cas d'un état de déformation incompressible on pose la condition supplémentaire

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0. \tag{7}$$

L'état de tension sera donné par (2), (2''), la tension normale σ_z étant exprimée par

$$\sigma_z = -\Delta F_0\,; \tag{2'''}$$

la fonction de tension $F = F(x, y, z)$ est harmonique

$$\Delta F = 0, \tag{8}$$

ayant la forme

$$F = -\frac{1}{2} z^2 \Delta F_0 + z F_1 + F_0\,. \tag{9}$$

3. – CAS PARTICULIERS.

Dans le cas d'un *état de tension plane* on pose la condition supplémentaire

$$\sigma_z = 0. \tag{10}$$

L'état de tension sera exprimé par (2), (2''), la fonction de tension $F = F(x, y, z)$ étant biharmonique

$$\Delta\Delta F = 0, \tag{11}$$

de la forme

$$F = -\frac{\mu}{2(1+\mu)} z^2 \Delta F_0 + z F_1 + F_0 + \frac{1}{4} k z (x^2 + y^2) \tag{12}$$

et de la classe C^4; cette représentation a été donnée par A. Clebsch (cfr. [1]).

Dans le cas d'un état de déformation incompressible, la fonction de tension $F = F(x, y, z)$ est harmonique, ayant la forme

$$F = zF_1 + F_0 ; \tag{13}$$

la fonction $F_0 = F_0(x, y)$ est aussi harmonique

$$\Delta F_0 = 0. \tag{14}$$

Dans le cas d'un *état de tension triaxiale* (sans cisaillements) on pose les conditions

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \tag{15}$$

L'état de tension sera donné par

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= (k_3 - \mu k_1) y^2 - (k_2 - \mu k_1) z^2 + a_1 y + a_2 z + a_3 , \\ \sigma_y &= (k_1 - \mu k_2) z^2 - (k_3 - \mu k_2) x^2 + b_1 z + b_2 x + b_3 , \\ \sigma_z &= (k_2 - \mu k_3) x^2 - (k_1 - \mu k_3) y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 , \end{aligned} \right. \tag{16}$$

où $k_1 , k_2 , k_3 , a_1 , a_2 , \cdots , c_3$ sont des constantes arbitraires.

4. – CONCLUSIONS.

Dans deux Notes successives on a représenté l'état de tension et l'état de déformation pour deux *problèmes bidimensionnels* fondamentaux (le cas d'une tension normale nulle et le cas de deux tensions tangentielles nulles), ainsi que pour quelques cas particuliers, à l'aide de fonctions potentiels (fonctions de tension) réelles. On observe ainsi qu'on peut faire une étude unitaire de quelques problèmes dont les résultants sont connus, ainsi que de problèmes nouveaux. L'utilisation de fonctions de deux variables a une grande importance pour la formulation des problèmes aux limites et chaque cas particulier peut être mis en liaison avec un tel problème.

Le cas où la *tension normale* σ_z est *nulle* correspond à l'étude approximative d'une plaque plane, dont les plans de séparation ($z =$ const) sont actionnés seulement par des charges tangentielles; dans ce cas cette tension peut être négligée par rapport aux autres tensions normales, même pour des plaques d'épaisseur moyenne. Mais l'hypothèse de G. R. Kirchhoff ne doit plus être introduite. De même, on peut poser des conditions exactes sur le contour de la plaque (trois conditions dans un point au lieu de deux conditions, comme dans la théorie classique des plaques planes minces). Les plans $z =$ const sont des plans de glissement.

Le cas où les *tensions tangentielles* τ_{zx} , τ_{zy} sont *nulles* correspond à l'étude de plaques planes superposées (corps stratifié), le glissement entre les faces $z =$ const étant libre. Aucune autre hypothèse simplificatrice n'est pas introduite (élément linéaire, tension normale σ_z nulle, etc.). Un tel cas peut servir aussi pour une étude initiale des plaques planes système « sandwich ». Les directions normales à ces faces sont des directions principales.

Les représentations données, où l'une des fonctions de tension (la fonction Θ a une signification physique bien précisée) nous ont permis d'obtenir avec aisance les résultats concernant un *état de déformation incompressible*.

Le cas d'un *état de tension plane* correspond à une plaque plane libre de charges sur les faces parallèles et actionnée sur le contour par des charges parallèles au plan médian et ayant une variation parabolique sur l'épaisseur de la plaque. Si la distribution des charges extérieures diffère sur l'épaisseur de la plaque, on doit appliquer le principe de B. de Saint Venant pour une bande le long du contour, en arrivant à un état de tension plane généralisée.

Le cas d'un *état de tension antiplane* correspond à un corps cylindrique de longueur finie, actionné seulement sur les faces de bout par des charges tangentielles assez générales et par des charges normales à variation linéaire sur les mêmes faces. Ce problème peut être considéré comme un problème complémentaire au précédent. Il correspond à la torsion pure des barres droites, superposée avec la flexion pure des mêmes barres; c'est le cas le plus général où l'effort tranchant ne passe pas par le centre de torsion.

Le cas où l'on a seulement *deux tensions tangentielles différentes de zéro* correspond à la torsion pure des barres droites; l'effort tranchant passe par le centre de torsion et il n'apparaît plus d'effet de flexion.

Le cas d'un *état de cisaillement pur* correspond au cas où l'on a trois familles de plans de glissement triorthogonaux; on peut obtenir un tel état de tension en superposant trois phénomènes de torsion pure dans trois directions triorthogonales.

Le cas d'un *état de tension sans cisaillements* correspond à un état de tension triaxiale; les directions principales sont les mêmes pour tout point du corps élastique. En particulier, si les tensions normales sont égales, on obtient un état de tension uniforme.

Les démonstrations qui ont conduit aux représentations données permettent d'affirmer que celles-ci sont *complètes*, c'est à dire tout état de tension qui vérifie les conditions imposées peut être mis sous cette forme. Il faut encore observer que dans ces représentations on a utilisé le nombre minimum de fonctions de tension nécessaires.

Dans le cas où l'on a la tension normale $\sigma_z = 0$, le vecteur tension sur les plans $z =$ const est tangent à ces plans; c'est une *famille de plans de glissement* (de plans parallèles). Dans le cas où les tensions tangentielles $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, le vecteur tension sur les plans $z =$ const est normal à ces plans; c'est *une famille de plans principales* (de plans parallèles). Les directions normales à ces plans sont des directions principales.

5. – D'AUTRES PROBLÈMES.

Naturellement, en procédant d'une manière analogue pour les tensions en coordonnées curvilignes quelconques, on peut obtenir des familles de surfaces de glissement ou des surfaces principales.

On peut poser des problèmes analogues pour les composantes du tenseur déformation ou pour les composantes du vecteur déplacement.

De même, on peut étudier le cas

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

ou bien le cas

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 ; \tag{17'}$$

ces deux problèmes peuvent être mises en liaison avec l'étude des plaques planes d'épaisseur moyenne, actionnées par des charges normales à leurs plans médians, dans le cas d'un état de tension symétrique par rapport au plan médian, respectivement antisymétrique par rapport à ce plan.

Dans le premier cas, la somme des tensions normales $\Theta = \Theta(x, y, z)$ sera donnée par

$$\Theta = -\frac{z^2}{2}\Delta\Theta' + z\Theta_0 + \Theta' \tag{18}$$

et la tension normale σ_z aura la forme

$$\sigma_z = \frac{1}{1+\mu}\Theta' + \chi \tag{19}$$

où la fonction $\Theta' = \Theta'(x, y)$ est biharmonique

$$\Delta\Delta\Theta' = 0 \tag{20}$$

et les fonctions $\Theta_0 = \Theta_0(x, y)$, $\chi = \chi(x, y)$ sont harmoniques

$$\Delta\Theta_0 = \Delta\chi = 0. \tag{21}$$

Dans le deuxième cas, la fonction $\Theta = \Theta(x, y, z)$ s'exprime sous la forme

$$\Theta = -\frac{z^3}{6}\Delta\Theta_0 - \frac{z^2}{2}\Delta\Theta' + z\Theta_0 + \Theta' \tag{18'}$$

et la tension normale σ_z va être donnée par

$$\sigma_z = \frac{1}{1+\mu}(z\Theta_0 + \Theta') + z\chi_0 + \chi, \tag{19'}$$

où les fonctions $\Theta' = \Theta'(x, y)$, $\Theta_0 = \Theta_0(x, y)$ sont biharmoniques

$$\Delta\Delta\Theta' = \Delta\Delta\Theta_0 = 0 \tag{20'}$$

et les fonctions $\chi = \chi(x, y)$, $\chi_0 = \chi_0(x, y)$ sont harmoniques

$$\Delta\chi = \Delta\chi_0 = 0. \tag{21'}$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] CLEBSCH A., *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris 1883.

[2] SUPINO G., *I sistemi elastici in due dimensioni e le loro relazioni con la deformazione spaziale*, « Rend. R. Acc. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », serie 6ª, *1*, fasc. 3, 116–119 (1925).