Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo,con stress iniziale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 363–369.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_363_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Meccanica. — *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale* (*). Nota II di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — In the present paper a proof of the theorem of Menabrea is given, when an elastic body, with the internal constraint of incompressibility and some boundary conditions, undergoes a thermoelastic transformation from a stressed spontaneous equilibrium state.

1. *Introduzione.* – In una precedente Nota [1] ho mostrato che la validità del teorema di Menabrea, già precisata da Signorini per solidi anche incomprimibili, con appoggi cedevoli, che subiscano piccole trasformazioni non isoterme, iniziantisi da uno *stato naturale* [2], può essere estesa al caso che le piccole trasformazioni non isoterme iniziino da uno stato di equilibrio *spontaneo intrinsecamente stabile*, sia in presenza di appoggi cedevoli sia in presenza del vincolo d'incastro. Oggetto della presente Nota è la dimostrazione del teorema inverso. Si mostrerà, esattamente, che se per effetto di forze esterne assegnate un corpo elastico, soggetto al vincolo interno di incomprimibilità e a vincoli cedevoli o incastri, subisce una piccola trasformazione non isoterma, con propagazione stazionaria di calore, a partire da una configurazione di equilibrio *spontaneo intrinsecamente stabile*, e il funzionale atto a rappresentare l'energia elastica di deformazione ammette il minimo nella classe degli stress ausiliari [3], tale minimo permette di individuare lo stato di equilibrio forzato del corpo. Il caso che un solido elastico *generico*, con i medesimi vincoli esterni qui considerati, subisca trasformazioni a partire da uno stato naturale, è stato già trattato da Grioli [4]. In una Nota successiva mi propongo di esaminare qualche esempio espressivo, come applicazione del presente teorema.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 14 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

(1) *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale*, Nota I, in « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *44*, fasc. n. 2 (1968). Riferendomi a formole di tale Nota scriverò il corrispondente numero con la specificazione « I ».

(2) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 4ª, « Annali di Matematica pura ed applicata », (IX), Vol. LI, 1960, cfr. pp. 363–369.

(3) Si utilizzano qui notazioni e locuzioni già adoperate nella Nota citata in [1].

(4) G. GRIOLI, *Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale della Elastostatica*, Simposio internazionale sulle applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cremonese, Roma 1965.

2. *Corpo elastico con appoggi cedevoli.* – Si supponga il corpo soggetto ad un appoggio elastico unilaterale e privo di attrito, e si ammetta che nella classe degli stress ausiliari $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1} = 0, \cdots, \xi_9 = 0$, che soddisfano l'equazione [(30), I]

$$(1) \qquad \int_{C_*} \sum_1^n {}_l\, \xi_l \eta_l^{(v)} \, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v} \, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* + \int_{a_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* = 0$$

$$(\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{N}^*, \ \psi \geq 0)$$

valida comunque si scelga il campo di vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$, esista uno stress $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \Delta_{n+1} = 0, \cdots, \Delta_9 = 0$ in corrispondenza del quale per una determinazione $\boldsymbol{\varphi}$ della funzione $\boldsymbol{\psi}$ verificante la condizione [(19), I]

$$(2) \qquad \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{w}^{(\varrho)} \, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{w}^{(\varrho)} \, d\Sigma_* + \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{w}^{(\varrho)} \, d\Sigma_* = 0$$

e per una data temperatura $u(P_*)$, il funzionale [(32), I]

$$(3) \qquad \mathfrak{M}(\xi) = \int_{C_*} \overline{R}(\xi^{(u)} | u) \, dC_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e} \, d\Sigma_*$$

assuma il suo valore minimo. Si può dimostrare allora che esiste uno spostamento $\boldsymbol{s}(P_*)$ congruente, che in ogni punto di C_* soddisfa le relazioni

$$(4) \qquad \eta_l = - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} | u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n)$$

ed è compatibile coi vincoli cui il corpo è soggetto.

Invero, per le ipotesi fatte, si ha

$$(5) \qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}(\overline{\xi} | 0) \, dC_* + \int_{C_*} \sum_l \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} | u) \overline{\xi}_l \, dC_* + $$
$$+ \frac{1}{2} \left[\int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e} \, d\Sigma_* - \int_{a_*} \frac{\varphi^2}{e} \, d\Sigma_* \right] \geq 0 ,$$

$$(6) \qquad \int_{C_*} \sum_l \xi_l \eta_l^{(v)} \, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v} \, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* = 0 ,$$

$$(7) \qquad \int_{C_*} \sum_l \Delta_l \eta_l^{(v)} \, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v} \, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* + \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* = 0 .$$

Da (6) e (7) si trae, per differenza,

$$\int_{C_*} \sum_l \bar{\xi}_l \eta_l^{(v)} \, dC_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* - \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* = 0 \,. \tag{8}$$

Si pensi ora, per un momento, di considerare nella classe degli stress ausiliari soltanto quelli che corrispondono all'unica reazione vincolare $\boldsymbol{\varphi}$, $\xi_l^{(\varphi)}$; la (8) si riduce alla condizione

$$\int_{\lambda_*} \sum_l \bar{\xi}_l^{(\varphi)} \eta_l^{(v)} \, dC_* = 0 \,. \tag{9}$$

Se si pone

$$H_l = -\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} \,|\, u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

e nella (9) si particolarizzano le funzioni $\eta_l^{(v)}$ nelle H_l, si ottiene la relazione

$$\int_{\lambda_*} \sum_l \bar{\xi}_l^{(\varphi)} H_l \, dC_* = 0 \tag{11}$$

che rappresenta, com'è stato già direttamente verificato (5), la forma integrale delle condizioni di congruenza di de Saint-Venant quando si scelgano nulle le $\bar{\xi}_l$ con $l > 6$. Si può dunque essere certi che, per il tramite delle (10), allo stress minimizzante il funzionale (3) corrisponde uno spostamento congruente, individuato univocamente o a meno di uno spostamento rigido d'insieme, a seconda che il numero n sia uguale o minore di 9: lo si indicherà con $\boldsymbol{\delta}(P_*)$.

Nella (8) si scelga allora come vettore $\boldsymbol{v}(P_*)$ il vettore $\boldsymbol{\delta}(P_*)$; con tale scelta la (8) diventa

$$-\int_{C_*} \sum_l \bar{\xi}_l \eta_l^{(\delta)} \, dC_* = \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\delta} \, d\Sigma_* - \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\delta} \, d\Sigma_* = \int_{\lambda_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta} \, d\Sigma_* \tag{12}$$

ove s'è posto

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi} \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{cases} \varphi \mathbf{N}^* & \text{su } a_* \\ 0 & \text{su } \lambda_* - a_* \,. \end{cases}$$

Tenendo conto di (12) la (5) diventa

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \bar{R}(\bar{\xi} \,|\, 0) \, dC_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e} \, d\Sigma_* + \tag{13}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{a_*} \frac{\varphi^2}{e} \, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta} \, d\Sigma_* \geq 0$$

(5) G. CARICATO, *Sul teorema di Menabrea*, « Rendiconti di Matematica », Vol. 19, 1960, p. 329.

che può anche scriversi

$$(13)' \qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \bar{R}(\bar{\xi} \mid 0)\, dC_* + \frac{1}{2} \int_{a_*} \frac{1}{e} (\psi^2 - \varphi^2)\, d\Sigma_* +$$

$$+ \int_{a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_* - a_*} \frac{1}{e} \psi^2\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_* - a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_* \geq 0 .$$

Se inoltre si pone

$$(14) \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\delta} + \frac{\varphi}{e} \mathbf{N}^*$$

la $(13)'$ è suscettibile della trasformazione seguente:

$$(13)'' \qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \bar{R}(\bar{\xi} \mid 0)\, dC_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_*} \frac{1}{e} \bar{\psi}^2\, d\Sigma_* +$$

$$+ \int_{a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_* - a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_* \geq 0 .$$

Si ricordi che ogni trasformazione del corpo elastico inizia da una configurazione di equilibrio spontaneo intrinsecamente stabile, e che perciò risulta [cfr (28), I]

$$\int_{C_*} \bar{R}(\xi^{(0)} \mid 0)\, dC_* \geq 0$$

per ogni spostamento isotermo solenoidale, l'uguaglianza a zero verificandosi solo in corrispondenza a spostamenti rigidi. Per tale motivo nella $(13)''$ vale l'uguaglianza a zero soltanto quando, per $\bar{\xi}_l$ corrispondenti a uno spostamento rigido d'insieme, si ha $\boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\varphi}$ su λ_*. La relazione $(13)''$, con una espressione però diversa della funzione integranda che compare nel primo integrale, è stata già esaminata dal Grioli nel lavoro citato in (4). Pertanto se si tiene presente che l'insieme dei vettori $(\bar{\boldsymbol{\psi}}, \lambda_*)$ è equilibrato [cfr. (2)], la $(13)''$ implica che siano soddisfatte le condizioni

$$(15) \qquad \int_{a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0 \quad , \quad \int_{\lambda_* - a_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_* > 0$$

quando si ammetta che comunque si spezzi λ_* in due porzioni λ_*', λ_*'', un possibile insieme di reazioni equiverse, punto per punto, ad $\mathbf{N}^*$ su λ_*' può sempre essere equilibrato da un possibile insieme di reazioni su λ_*''. Le (15) esprimono che lo spostamento congruente $\boldsymbol{\delta}(P_*)$ verifica in media su λ_* le condizioni imposte dai vincoli al corpo elastico. Ciò basta se si suppone che lo stress minimizzante il funzionale (3) non sia differenziabile. Se però tale stress risulta differenziabile [6], vengono ad essere soddisfatte localmente le condizioni

$$\nu \times \mathbf{N}^* = 0 \quad \text{su } a_* \quad , \quad \delta \times \mathbf{N}^* \geq 0 \quad \text{su } \lambda_* - a_*$$

traducenti la presenza dei vincoli imposti.

2. *Sulla determinazione univoca della configurazione di equilibrio.* – Com'è stato già precisato, lo stress minimizzante il funzionale (3) non è unico; perciò la configurazione d'equilibrio non è definita univocamente. Per eliminare tale indeterminazione, quando è possibile, si può procedere nel modo seguente. Si sceglie tra i vettori spostamento cui si perviene mediante le (10), aggiungendo eventualmente una rotazione rigida d'insieme, quello $\boldsymbol{s}^{(0)}(P_*)$ che si annulla col suo rotore in un punto O_* arbitrario in C_*. Indi scrivendo lo spostamento effettivo nella forma

$$\boldsymbol{s}(P_*) = \boldsymbol{s}^{(0)}(P_*) + \omega^{(0)} \wedge O_* P_* \qquad (\omega^{(0)} \text{ costante}) \tag{16}$$

se ne calcola il vettore $\omega^{(0)}$ seguendo il procedimento suggerito da Signorini [7]. Lo stress effettivo si ottiene allora per il tramite delle (10) ove i primi membri sono ormai definiti tutti univocamente, rappresentando le caratteristiche η_l dello spostamento (16).

Occorre però tener presente che la sollecitazione esterna potrebbe ammettere assi di equilibrio, e il vettore $\omega^{(0)}$ sarebbe in tal caso indeterminato, o potrebbe trattarsi addirittura di un caso di incompatibilità.

3. *Corpo elastico cui si assegna lo spostamento su una porzione della frontiera.* – Si ammetta ora che su una porzione λ_* della frontiera Σ_* del corpo elastico sia assegnato lo spostamento $\zeta(P_*)$; sulla parte residua di Σ_* sia data la sollecitazione. Si ammetta inoltre che, nella classe degli stress ausiliari soddisfacenti la (1), il funzionale

$$\mathfrak{M}(\xi) = \int_{C_*} \overline{R}(\xi^{(u)} \mid u)\, dC_* - \int_{\lambda_*} \psi \times \zeta\, d\Sigma_* \tag{17}$$

con la ψ vincolata dalla sola condizione (2), ammetta minimo in corrispondenza ad una data temperatura $u(P_*)$, ad uno stress $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \Delta_{n+1} = 0, \cdots, \Delta_9 = 0$ e ad una particolare determinazione φ della funzione ψ. Si può allora dimostrare che esiste uno spostamento $\boldsymbol{s}(P_*)$ congruente, che su λ_* al più differisca da $\zeta(P_*)$ per uno spostamento rigido, e che in ogni punto di C_* soddisfa le relazioni

$$\eta_l = -\frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}}(\Delta^{(u)} \mid u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n).$$

(6) Cfr. G. GRIOLI, Conferenza citata in (4), p. 74.

(7) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 3ª, «Annali di Matematica», (IV), tomo XXXIX, 1955, p. 166.

Invero per le ammissioni fatte, si può scrivere

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}(\overline{\xi} \mid 0)\, dC_* + \int_{C_*} \sum_l \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} \mid u)\, \overline{\xi}_l\, dC_* + \\ - \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\zeta}\, d\Sigma_* \geq 0\,, \tag{18}$$

$$\int_{C_*} \sum_l \xi_l \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0\,, \tag{19}$$

$$\int_{C_*} \sum_l \Delta_l \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0\,. \tag{20}$$

Da (19) e (20) segue

$$\int_{C_*} \sum_l \overline{\xi}_l \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0\,. \tag{21}$$

Come nel caso precedente, si trae dalla (21), in corrispondenza allo stress minimizzante il funzionale (17), l'esistenza di uno spostamento congruente $\boldsymbol{\delta}(P_*)$ le cui caratteristiche di deformazione soddisfano le relazioni

$$\eta_l^{(\delta)} = - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} \mid u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n). \tag{22}$$

Si particolarizzi nella (21) il vettore $\boldsymbol{v}$ nel vettore $\boldsymbol{\delta}$; si ottiene

$$\int_{C_*} \sum_l \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} \mid u)\, \overline{\xi}_l\, dC_* = \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_*\,. \tag{23}$$

Tenendo conto della (23) la (18) diventa

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}(\overline{\xi} \mid 0)\, dC_* + \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\delta}\, d\Sigma_* - \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\zeta}\, d\Sigma_* \geq 0$$

ovvero, ponendo su λ_*

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\zeta}\,,$$

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}(\overline{\xi} \mid 0)\, dC_* + \int_{\lambda_*} \overline{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{\nu}\, d\Sigma_* \geq 0\,. \tag{24}$$

L'uguaglianza a zero sussiste soltanto quando le ξ_l corrispondono a uno spostamento rigido e si ha $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$ quasi ovunque su λ_*. Per il vettore $\overline{\boldsymbol{\psi}}$ equilibrato su λ_* la (24) implica [8] la condizione

$$\int_{\lambda_*} \bar{\boldsymbol{\psi}} \times \boldsymbol{v} \, d\Sigma_* = 0 , \tag{25}$$

ossia il vettore $\boldsymbol{v}$ risulta in media su λ_* ortogonale a $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ comunque questo sia scelto in λ_*. La (25) esprime quanto basta per una formulazione puramente integrale delle condizioni imposte dai vincoli allo spostamento del corpo elastico. Se però si aggiunge l'ipotesi che lo stress minimizzante il funzionale (17) sia di classe C^1, la (25) dà esattamente, in forma integrale, la condizione necessaria e sufficiente perché il vettore $\boldsymbol{v}$ rappresenti localmente su λ_* uno spostamento rigido [9].

Si osserva infine che il funzionale (17) non ammette minimo proprio; ma per individuare univocamente lo stato di equilibrio valgono le stesse considerazioni svolte nel n. 2 per il solido con appoggi cedevoli.

(8) Cfr. G. GRIOLI, Conferenza citata in (4), p. 72.

(9) Cfr. G. GRIOLI, *Sistemi a trasformazioni reversibili*, in *Non linear continuum theories*, C.I.M.E., Cremonese, Roma 1966, p. 154.