Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

István Reiman

Sui piani micropascaliani finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 354–362.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_354_0>

Geometria. — *Sui piani micropascaliani finiti.* Nota di ISTVÁN REIMAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUNTO. — Eine projektive Ebene, in welcher der zentrale kleine Satz von Pappos–Pascal gilt, wird als Micro–Pascalsch bezeichnet. In dieser Arbeit werden einige Sätze der endlichen Micro–Pascalschen Ebenen auf rein synthetischer Weise behandelt.

In questa Nota vengono trattati, con metodo puramente sintetico, alcuni problemi – in parte già noti – relativi ai piani grafici finiti.

Nel nostro studio assumono una parte importante le configurazioni di Fano. La *configurazione di Fano* è un quadrangolo piano completo con punti diagonali allineati, cioè un piano grafico finito di ordine 2. Se tutti i quadrangoli del piano sono configurazioni di Fano (o quadrangoli di Fano), il piano si chiama *piano di Fano*. A norma dell'importante risultato di Gleason, i piani grafici finiti di Fano risultano desarguesiani [1].

Vogliamo applicare il piccolo teorema di Pappo–Pascal (ossia il teorema micro–Pascal, in seguito designato come *MP–teorema*) nella forma seguente: se in un esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ del piano i vertici A_1, A_3, A_5 sono incidenti ad una retta a, e i vertici A_2, A_4, A_6 sono incidenti ad una retta b, e se le rette $A_1 A_4, A_2 A_5, A_3 A_6$ sono incidenti ad un punto P, allora i punti $a \cap b = M$, $A_1 A_2 \cap A_4 A_5 = X$, $A_2 A_3 \cap A_5 A_6 = Y$ risultano allineati.

Un piano grafico si chiama *MP–piano*, se per esso è valido incondizionatamente l'MP–teorema. Secondo il risultato di Lüneburg un MP–piano finito risulta desarguesiano [2].

1. *L'ordine di un piano finito di Fano è pari.*

Consideriamo un punto A, due rette r_1, r_2 incidenti ad A, ed un punto B non incidente a queste rette (fig. 1). Sia Q un punto qualsiasi della retta AB distinto da A e da B, e sia X_i un punto della retta r_1 distinto da A ($i = 1, 2, \cdots, q$), ove q è l'ordine del piano. Sia poi $X_i B \cap r_2 = T_i$, $T_i Q \cap \cap r_1 = Y_i$, $X_i Q \cap r_2 = Z_i$. In virtù dell'ipotesi, $AX_i T_i Q$ è un quadrangolo di Fano, e per questo i punti Y_i, Z_i, B sono allineati. Si verifica facilmente che il punto X_i determina univocamente i punti T_i, Z_i e anche Y_i, onde è possibile – a partire dal punto X_i – costruire univocamente il quadrangolo $AX_i T_i Q$. Ora, prendiamo le mosse dal punto Y_i; talché porremo $Y_i = X_k$. In virtù della costruzione, risulta $T_k = Z_i$, in conseguenza della collinearità dei punti Y_i, B, Z_i e $X_i = Y_k$. Ciò vuol dire che tra i punti della retta r_1 (escluso il punto A) esiste una corrispondenza biunivoca involutoria, priva di punti uniti, eppertanto l'ordine q del piano è pari.

(*) Nella seduta del 9 marzo 1968.

2. *In un piano di Fano vale l'MP–teorema.*

Siano A_1, A_3, A_5 tre punti distinti della retta a e A_2, A_4, A_6 tre punti distinti della retta b, le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ siano incidenti ad un punto P. Si ponga $a \cap b = M$, $A_1 A_2 \cap A_4 A_5 = X$, $A_2 A_3 \cap A_5 A_6 = Y$. I punti diagonali M, X, P del quadrangolo completo $A_1 A_2 A_4 A_5$, come pure i punti diagonali M, Y, P del quadrangolo $A_2 A_3 A_5 A_6$, sono allineati, cosicché anche i punti M, X, Y sono allineati.

3. In un piano grafico, dall'MP–teorema segue facilmente l'inversione seguente del teorema [1].

Sia $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ un esagono tale che i vertici A_1, A_3, A_5 siano incidenti ad una retta a e i vertici A_2, A_4, A_6 siano incidenti ad un'altra retta b; ed inoltre i punti $a \cap b = M$, $A_1 A_2 \cap A_4 A_5 = X$, $A_2 A_3 \cap A_5 A_6 = Y$ siano allineati. Allora le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ risultano incidenti ad un punto P.

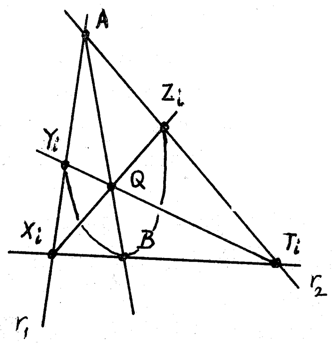

Fig. 1.

4. In un MP–piano consideriamo due rette distinte a e b, ed il loro punto M d'intersezione. Da un punto P qualsiasi del piano (ma non incidente alle rette a, b) tiriamo due rette distinte che non siano incidenti al punto M; una di queste intersechi le rette a e b in punti A_1 e B_1, l'altra in A_2 e B_2. Posto $A_1 B_2 \cap A_2 B_1 = Q$, i punti P e Q chiamansi *coniugati* rispetto a $\{a, b\}$. È evidente che il concetto di coniugio testé introdotto risulta simmetrico.

In un MP–piano, tutti i punti coniugati di un punto P rispetto ad una coppia $\{a, b\}$ di rette risultano incidenti ad una retta fissa appartenente al fascio delle rette a, b.

Consideriamo – con le notazioni precedenti – due rette distinte tra loro, incidenti a P e distinte di PA_1 e PA_2. Queste rette intersecano la retta a in punti A_3 e A_4 e la retta b in punti B_3 e B_4. Poniamo $Q' = A_3 B_4 \cap A_4 B_3$, $Q'' = A_2 B_3 \cap A_3 B_2$. I punti Q' e Q'' sono coniugati del punto P. Applicando l'MP–teorema una prima volta per l'esagono $A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3$ ed una seconda volta per l'esagono $A_2 B_3 A_4 B_2 A_3 B_4$, vediamo così che i punti

(1) Per semplicità, supporremo in seguito che le rette del piano abbiano almeno 4 punti.

M, Q, Q' e i punti M, Q, Q'' sono allineati, cioè tutti i coniugati del punto P sono incidenti alla retta MQ.

La retta p, contenente i punti coniugati del punto P rispetto a $\{a, b\}$, si chiama la *retta polare* del punto P rispetto a $\{a, b\}$. La retta p non può coincidere né con a, né con b.

Se, nel dato MP–piano, la retta polare del punto P rispetto a $\{a, b\}$ *è* p, *tutti i punti della retta* p *(escluso il punto d'intersezione* $a \cap b = M$*) sono coniugati di P.*

Supponiamo che Q sia un punto qualsiasi della retta p distinto da M. Una retta qualsiasi incidente a P ma non appartenente Q intersechi la retta a in A_1, la retta b in B_1 e sia $A_1 Q \cap b = B_2$, $PB_2 \cap a = A_2$. Il punto $A_1 B_2 \cap \cap A_2 B_1 = Q'$ è coniugato di P, onde Q' è incidente alla retta polare di P e per questo $Q' \equiv Q$.

Così, dalla definizione dei punti coniugati, risulta che la retta polare di ogni punto della retta p è identica alla retta $MP = p'$, e viceversa la retta polare di ogni punto di p' è la retta p.

Abbiamo in tal modo determinato una corrispondenza biunivoca involutoria tra le rette passanti per il punto M e distinte da a e b, onde diremo che le rette p e p' sono *coniugate* rispetto a $\{a, b\}$. Notiamo che le rette p e p' non devono essere necessariamente distinte.

5. *Se nel dato MP–piano le rette distinte* p *e* p' *sono coniugate rispetto a* $\{a, b\}$, *le rette* a *e* b *sono coniugate rispetto a* $\{p, p'\}$.

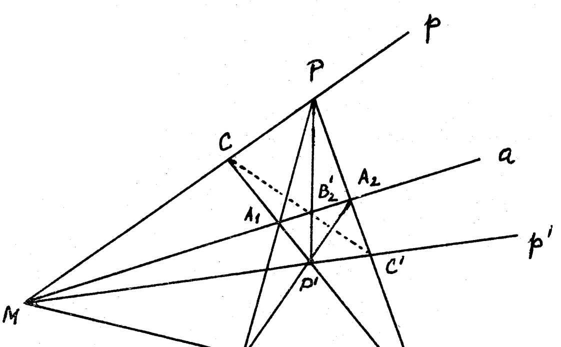

Fig. 2.

Sia P' il punto coniugato di un punto arbitrario P della retta p rispetto a $\{a, b\}$. Per costruire il punto P' scegliamo due punti A_1 e A_2 sulla retta a e siano $PA_1 \cap b = B_1$, $PA_2 \cap b = B_2$, $A_1 B_2 \cap A_2 B_1 = P'$ (fig. 2). Per dimostrare il teorema 5, basta verificare che uno dei punti coniugati del punto B_2 rispetto a $\{p, p'\}$ è incidente alla retta a. Sia $A_1 B_2 \cap p = C$ e $A_2 B_2 \cap p' = C'$. Il punto $CC' \cap PP' = B_2'$ è coniugato del punto B_2. Nell'esagono $A_1 PCA_2 P' C'$

i punti $A_1 P \cap A_2 P' = B_1$, $PC \cap P' C' = M$, B_2 sono allineati, talché applicando il teorema del n. 2 abbiamo che le rette $A_1 A_2$, PP', CC' risultano incidenti ad uno stesso punto, cioè B_2' è incidente alla retta a.

In virtù di quanto precede possiamo costatare che se in un punto M dell'MP–piano consideriamo le coppie di rette corrispondentisi nel coniugio, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra le rette incidenti ad M.

6. *Se l'ordine dell'MP–piano finito è pari, ed a e b sono rette distinte del piano, esiste almeno una retta p che è autoconiugata rispetto a* $\{a, b\}$.

Questo asserto segue dal fatto che al punto $M = a \cap b$ sono incidenti un numero dispari di rette; talché, in forza della corrispondenza biunivoca indotta da a e b, esistono un numero dispari di rette che sono autoconiugate.

Osserviamo che l'interpretazione geometrica del fatto che la retta p è autoconiugata è la seguente: tutti i quadrangoli completi, che abbiano due vertici sulla retta a e due sulla retta b e un punto diagonale sulla retta p, sono quadrangoli di Fano.

Viceversa: se il quadrangolo $A_1 A_2 B_1 B_2$ è un quadrangolo di Fano, la retta contenente i punti diagonali $A_1 A_2 \cap B_1 B_2 = M$, $A_1 B_1 \cap A_2 B_2 = P$, $A_1 B_2 \cap A_2 B_1 = Q$ è autoconiugata rispetto a $\{A_1 A_2, B_1 B_2\}$, perché, secondo la definizione, i punti P e Q sono coniugati.

7. *Se la retta p dell'MP–piano è autoconiugata rispetto a* $\{a, b\}$, *essa risulta autoconiugata rispetto ad ogni* $\{a', b'\}$, *ove il punto $a' \cap b'$ sia incidente alla retta p.*

Scegliamo sulla retta p un punto qualsiasi $P \neq a \cap b = M$ e consideriamo due rette a', b' che siano incidenti a P. Queste rette intersecano le rette a e b nei punti A_1, A_2, risp. B_1, B_2 (fig. 3). (I punti A_1, A_2, B_1, B_2

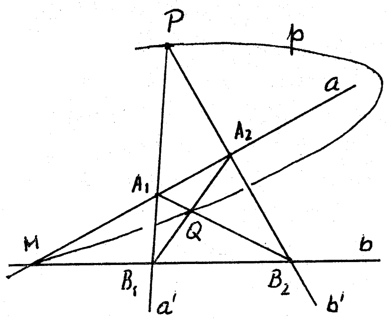

Fig. 3.

siano tutti distinti). I punti diagonali M, P, Q del quadrangolo completo $A_1 A_2 B_1 B_2$ sono incidenti a p; il che vuol dire che i punti M e Q sono coniugati rispetto a $\{a', b'\}$, onde p è autoconiugato rispetto a $\{a', b'\}$. Se, partendo dal sistema $\{a', b'\}$, ripetiamo la dimostrazione precedente per una nuova coppia di rette a'', b'' incidenti a M, otteniamo la dimostrazione del teorema 7.

Quest'ultimo risultato può essere interpretato dicendo che « esser autoconiugata » è un concetto caratteristico della retta autoconiugata, cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento $\{a, b\}$.

Se la retta p dell'MP–piano è autoconiugata rispetto a $\{a, b\}$, anche la retta a è autoconiugata rispetto a $\{b, p\}$.

Consideriamo i punti distinti A_1, A_2 della retta a, i punti B_1, B_2 della retta b che non sono incidenti a p, e sia $PA_1 \cap b = B_1$, $PA_2 \cap b = B_2$, $A_1 B_2 \cap A_2 B_1 = Q$, $a \cap b = M$. Essendo la retta p autoconiugata rispetto a $\{a, b\}$, il punto Q è incidente alla retta p. In virtù della definizione di punti coniugati (n. 4), i punti A_1 e A_2 sono coniugati rispetto a $\{b, p\}$, cioè la retta a è autoconiugata rispetto a $\{b, p\}$.

Se l'ordine dell'MP–piano finito è pari, tutte le rette del piano sono autoconiugate.

Consideriamo una qualsiasi retta a del piano e scegliamo una retta b distinta da a. In virtù del n. 5, esiste una retta p autoconiugata rispetto a $\{a, b\}$, eppertanto in virtù del teorema precedente, anche la retta a è autoconiugata rispetto a $\{b, p\}$.

8. *Un MP–piano finito di ordine pari è un piano di Fano.*

Basta dimostrare che un qualsiasi quadrangolo completo $A_1 A_2 B_1 B_2$ del piano è un quadrangolo di Fano; sia $A_1 A_2 \cap B_1 B_2 = M$, $A_1 B_2 \cap A_2 B_1 = Q$, $A_1 B_1 \cap A_2 B_2 = P$. In virtù del n. 7, la retta PQ è autoconiugata rispetto a $\{A_1 A_2, B_1 B_2\}$; ma questo vuol dire, in virtù della osservazione fatta al n. 6, che i punti diagonali del quadrangolo completo $A_1 A_2 B_1 B_2$ sono allineati.

Osserviamo che, in virtù del teorema di Gleason, segue che *un MP–piano finito di ordine pari è desarguesiano.*

9. Come semplice conseguenza di quanto precede, si ha che

In un MP–piano o ogni quadrangolo completo è un quadrangolo di Fano, o nessuno di quelli è un quadrangolo di Fano.

Se nel piano esiste un quadrangolo di Fano, si scelgano due lati a e b del quadrangolo; la diagonale p appartenente al fascio di a e b è autoconiugata rispetto a $\{a, b\}$, in virtù dell'osservazione del n. 6. Una qualsiasi retta r del piano intersechi la retta p in un punto M e sia r' una retta incidente ad M e distinta da p e da r. In virtù del n. 7, p è autoconiugata rispetto a $\{r, r'\}$, cioè tutte le rette del piano sono autoconiugate. Ne segue, in virtù del n. 8, che il piano è un piano di Fano.

Poiché, in virtù del n. 1, l'ordine del piano finito di Fano è pari e, in virtù del n. 6, nell'*MP*–piano finito si trova un quadrangolo di Fano, possiamo formulare il nostro risultato nel modo seguente:

Un MP–piano finito contiene qualche quadrangolo di Fano se, e soltanto se, l'ordine del piano è pari.

10. In base alla corrispondenza introdotta nel n. 5 tra le rette d'un fascio, si può definire come segue una corrispondenza biunivoca σ fra i punti dell'*MP*–piano.

Fissiamo un punto S, una retta a non incidente ad S ed un punto M sulla retta a. Se P è un punto del piano non appartenente alla retta MS, sia

$$\sigma(P) = P, \text{ se } P \text{ è incidente ad } a;$$

$$\sigma(P) = P', \text{ se } P \text{ non è incidente ad } a,$$

dove P e P' sono punti coniugati rispetto a $\{a, MS\}$ e i punti S, P, P' risultano allineati.

La corrispondenza σ dipende a priori dalla scelta di S, a, M, onde verrà denotata con $\sigma_{S,a,M}$. La corrispondenza σ è involutoria, poiché, in virtù della definizione di punti coniugati, $\sigma(P') = P$.

Se nell'MP–piano si trova un quadrilatero di Fano, cioè in virtù del n. 9, se si tratta di un piano di Fano, la corrispondenza σ è l'identità, perché tutte le rette sono autoconiugate. Per questo, nel seguito, supporremo che il piano in esame non sia un piano di Fano.

Il punto S si dice il *centro* della corrispondenza e la retta a l'*asse* di quella.

11. La corrispondenza $\sigma_{S,a,M}$ non dipende dalla scelta di M.

Sia M' un punto qualsiasi della retta a, P un punto qualsiasi non incidente alle rette MS e $M'S$ e sia $\sigma_{S,a,M}(P) = P'$. Per costruire il punto P', scegliamo per il punto P una retta non appartenente ad S; questa retta

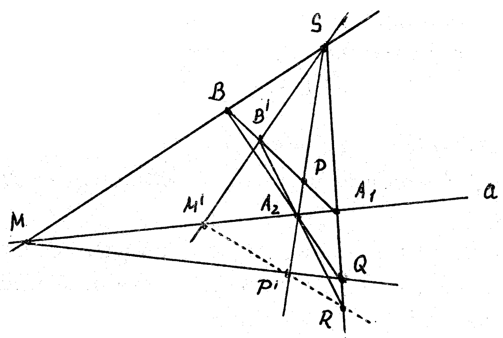

Fig. 4.

intersechi la MS in B, la retta a in A_1; denotiamo poi con A_2 il punto d'intersezione delle rette SP e a. I punti $Q = SA_1 \cap BA_2$ e P sono coniugati rispetto a $\{a, MS\}$, poiché $P' = SP \cap MQ$ (fig. 4). Costruiamo ora il punto $\sigma_{S,a,M'}(P)$. Sia $A_1 B \cap SM' = B'$ e $B'A_2 \cap SA_1 = R$. Le rette $M'R$ e $M'P$ sono coniugate rispetto a $\{a, M'S\}$; perciò $\sigma_{S,a,M'}(P) = M'R \cap SP$. Per dimostrare il nostro teorema dobbiamo verificare che $\sigma_{S,a,M'}(P) = P'$, cioè che i punti M', P', R sono allineati. Consideriamo l'esagono $MSM'QA_2R$. Essendo $B = MS \cap QA_2$, $M'S \cap A_2R = B'$ ed A_1 allineati, applicando il teorema del n. 2 abbiamo che le rette MQ, SA_2, $M'R$ s'intersecano in un punto che verifica il nostro asserto.

I precedenti risultati dànno la possibilità di estendere la corrispondenza σ ai punti della retta MS in base al coniugio rispetto a $\{a , M'S\}$. In seguito denoteremo la corrispondenza $\sigma_{S,a,M}$ con $\sigma_{S,a}$, od anche, quando ciò non presenti ambiguità, con σ.

12. *La corrispondenza* $\sigma_{S,a}$ *è un'omologia.*

Basta dimostrare che la corrispondenza è una collineazione (ved. per esempio [4]), cioè che a punti allineati corrispondono punti allineati e viceversa. Ciò è manifestamente vero per le rette passanti per il punto S. Ora, consideriamo una retta r non incidente ad S e sia $r \cap a = M$, e sia poi r' la retta coniugata di r rispetto a $\{a , MS\}$. In virtù del teorema del n. 11, la corrispondenza $\sigma_{S,a}$ trasforma i punti di r nei punti di r' e viceversa.

Allora $\sigma_{S,a}$ è un'omologia involutoria, di centro S ed asse a, cioè una *simmetria.*

Da quanto precede si trae che:

Nell'MP–piano, dati un qualsiasi punto S e una retta a non incidente ad S, esiste sempre un'unica simmetria di centro S ed asse a.

13. *Dati nell'MP–piano tre punti distinti allineati S, A, A' ed un punto M non incidente alla retta SA, esiste sempre un'unica retta a incidente ad M tale che, nella simmetria σ definita dal centro S e dall'asse a, risulti $\sigma(A) = A'$.*

Sia a la retta coniugata della MS rispetto a $\{MA , MA'\}$. In virtù del teorema del n. 5, le rette MA e MA' sono coniugate rispetto a $\{a , MS\}$; allora, in virtù della definizione data nel n. 10, $\sigma_{S,a}(A) = A'$. La retta a è univocamente determinata perché, altrimenti, la retta MS avrebbe due coniugate distinte rispetto a $\{MA , MA'\}$.

14. *Date nell'MP–piano due simmetrie σ_{S,a_1} e σ_{S,a_2} con centro S comune e con gli assi a_1 e a_2, il prodotto $\sigma_{S,a_2}\sigma_{S,a_1}$ è una elazione di centro S e asse a, ove $a = S \cup (a_1 \cap a_2)$.*

Il prodotto $\sigma_{S,a_2}\sigma_{S,a_1} = \varepsilon$ è anzitutto un'omologia di centro S. Essendo a_1 e a_2 non incidenti al centro S, il punto $A = a_1 \cap a_2$ è unito nell'omologia ε, onde appartiene all'asse di ε. Supponiamo per assurdo che l'omologia ε abbia un punto fisso P non appartenente alla retta AS. Ne seguirebbe che il punto P avrebbe la stessa immagine nelle omologie σ_{S,a_1} e σ_{S,a_2}; ma, a norma del n. 13, questo fatto vorrebbe dire che gli assi sono identici, contrariamente all'ipotesi. Allora l'asse dell'omologia ε è la retta AS, onde ε è un'elazione (omologia speciale).

15. *Nell'MP–piano ogni elazione ε può essere rappresentata come prodotto di due simmetrie, l'asse della prima simmetria potendosi anzi assegnare ad arbitrio.*

Sia data l'elazione ε di centro S, asse a e con la coppia di punti P, $P' = \varepsilon(P)$; assegniamo quindi una retta a_1 tale che sia $a \cap a_1 = A \neq S$. Poniamo $\sigma_{S,a_1}(P) = P''$. In virtù del n. 13, esiste un'unica retta a_2 incidente ad A tale che $\sigma_{S,a_2}(P'') = P'$. A norma del n. 14, l'omologia $\sigma_{S,a_2}\sigma_{S,a_1} \equiv \varepsilon$.

I precedenti risultati possono dunque esser interpretati dicendo che: *Nell'MP–piano esiste ogni elazione.*

16. *Se l'MP–piano non contiene quadrangoli completi con i punti diagonali allineati, in esso vale incondizionatamente il piccolo teorema di Desargues.*

Siano SAA', SBB', SCC' tre terne costituite ciascuna da tre punti distinti allineati, e siano allineati anche i punti $AB \cap A'B' = X$, $BC \cap B'C' = Y$ e S. Per provare la validità del piccolo teorema di Desargues, basta mostrare che il punto $Z = AC \cap A'C'$ è incidente alla retta XY. Poiché, a norma del n. 15, esiste un'elazione ε con asse XY e centro S tale che $\varepsilon(A) = A'$, si ha che $\varepsilon(B) = B'$ e $\varepsilon(C) = C'$, sicché l'intersezione delle rette AC e $A'C'$ si trova sulla retta XY.

In virtù del n. 9, se ne deduce immediatamente che:

In ogni MP–piano finito di ordine dispari vale il piccolo teorema di Desargues.

Osserviamo che, a norma del teorema di Zorn e Levi [4], da ciò segue che *ogni MP–piano finito di ordine dispari è desarguesiano.*

17. Si ha facilmente che vale anche l'inversa della proposizione del n. 16.

Se in un piano grafico vale il piccolo teorema di Desargues, il piano è un MP–piano.

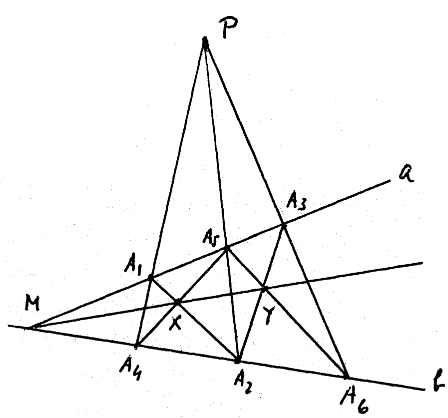

Fig. 5.

Consideriamo un esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, i cui vertici A_1, A_3, A_5 siano incidenti alla retta a, i vertici A_2, A_4, A_6 lo siano alla retta b e le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ passino per un punto P (fig. 5). Sia $a \cap b = M$, $A_1 A_2 \cap A_4 A_5 = X$, $MX \cap A_2 A_3 = Y$. Applicando il piccolo teorema di Desargues ai triangoli $A_1 P A_3$ e $X A_5 Y$, si ha che i punti M, A_4, A_2 e $A_6' = PA_3 \cap A_5 Y$ sono allineati. Essendo $A_6' = b \cap PA_3$, risulta $A_6' \equiv A_6$.

18. Un piano grafico si chiama *esagonale* se per esso vale la condizione esagonale, cioè: se P, Q, R sono tre punti allineati e se, dato un esagono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ed un punto C, sussistono i seguenti allineamenti $PA_1 A_2$,

$RA_2\,CA_5$, $PA_6\,CA_3$, $QA_1\,CA_4$, $QA_2\,A_3$, $RA_3\,A_4$, $PA_4\,A_5$, $QA_5\,A_6$, allora si ha che i punti R , A_1 , A_6 risultano allineati.

La seguente proposizione caratterizza i piani finiti esagonali di ordine pari, e si può ottenere analogamente alle precedenti.

Siano P, R , C tre punti non allineati del piano grafico finito esagonale di ordine pari. Se denotiamo con q l'ordine del piano, esistono almeno $q-1$ punti D tali che il quadrangolo completo $PRCD$ risulti un quadrangolo di Fano.

Sia Q un punto della retta PR distinto da P e da R, e consideriamo un punto A_1 distinto da Q e da C sulla retta QC (fig. 6). Sia poi $PA_1 \cap RC = A_2$, $PC \cap QA_2 = A_3$, $QC \cap RA_3 = A_4$. Così si può far corrispondere a ciascun

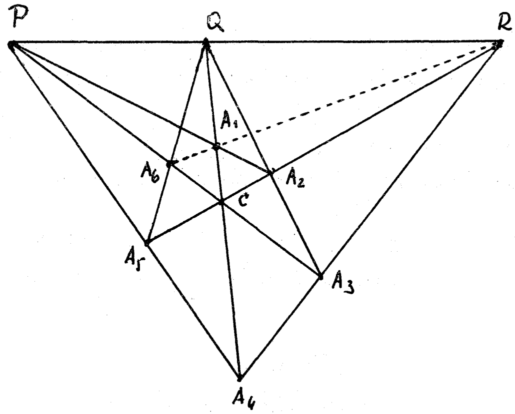

Fig. 6.

punto A_1 della retta QC un punto A_4. Questa corrispondenza è biunivoca ed involutoria, ossia, nel modo indicato, ad A_4 corrisponde il punto A_1. Infatti posto $PA_4 \cap RC = A_5$, $PC \cap QA_5 = A_6$, il punto d'intersezione delle rette QC e RA_6 è A_1, in virtù della condizione esagonale.

Essendo dispari il numero dei punti distinti da Q e da C della retta QC, nella corrispondenza $A_1 \longleftrightarrow A_4$ esiste almeno un punto D per il quale $A_1 = A_4 = D$. A norma della costruzione, $A_3 = A_6$, onde i punti diagonali Q , A_2 , A_3 del quadrangolo completo $PRCD$ sono allineati.

Il punto Q della retta RP può venir scelto in $q-1$ modi; ogni scelta dà almeno un quadrangolo di Fano, talché, essendo distinti quadrangoli provenienti da punti Q distinti, il numero dei quadrangoli $PRCD$ di Fano risulta almeno $q-1$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. M. GLEASON, *Finite Fano planes*, «Amer. J. Math.», *78*, 797–807 (1956).

[2] H. LÜNEBURG, *Über die beiden Sätze von Pappos*, «Arch. Math», *11*, 339–341 (1960).

[3] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.

[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, with an Appendix by L. Lombardo-Radice. Roma 1961.