Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Invarianti proiettivi di elementi differenziali tangenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 343–348.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_343_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Geometria differenziale. — *Invarianti proiettivi di elementi differenziali tangenti.* Nota [(*)] del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — In relation with former papers by this Author and by A. Terracini the projective invariants of two tangent (but not osculating) differential elements (in the 3-dimensional projective space) are determined up to the individualization of an intrinsically determined reference system.

1. La preparazione per la stampa di due volumi di lavori di Alessandro Terracini [(1)] mi ha indotto a riprendere in considerazione gli invarianti proiettivi, ed altre questioni, relativi ad elementi differenziali di curve nello ordinario spazio proiettivo.

In una mia Nota lincea del 1935 [(2)] ho considerato diversi invarianti di coppie di elementi differenziali curvilinei [(3)] nel piano e nello spazio. In particolare (cfr. III; 4, p. 490) per due elementi differenziali del 3° ordine, nello spazio con lo stesso centro O e la stessa tangente t, ma con piani osculatori distinti (e a contatto del 2° ordine e non superiore) ho provato la esistenza di due *invarianti infinitesimi* e quindi di un *invariante finito* loro rapporto.

Il Terracini ha ripreso [(4)] la considerazione di questo invariante dandone un elegante significato geometrico. Egli considera le proiezioni dei dati $\underset{1}{E}^3$, $\underset{2}{E}^3$ da due centri distinti G_1, G_2 sopra un piano passante per la tangente comune [(5)]. La condizione che le proiezioni $\underset{1}{E}'^3$, $\underset{2}{E}'^3$ coincidano determina nella stella di centro O una corrispondenza (in cui si corrispondono le rette OG_1, OG_2) generalmente quadratica dipendente dal piano su cui si proietta: essa è un'omografia soltanto per *un* ben determinato piano per t. Il birapporto di questo

(*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1968.

(1) Pubblicati, col titolo *Selecta*, presso le Edizioni Cremonese (Roma 1968).

(2) E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rendic. Acc. Naz. dei Lincei », s. 6, vol. XXII, 1935, pp. 483–491.

(3) Per elemento differenziale curvilineo d'ordine s, che indico con E^s, intendo la classe d'equivalenza insieme di tutte le curve aventi con una curva data regolare in un suo punto O (che si dirà *centro* di E^s), contatto di ordine s. Gli spazi osculatori in O comuni a tutte queste curve si dicono osculatori ad E^s.

(4) A. TERRACINI, *Osservazioni sulle coppie di elementi curvilinei spaziali*, Rivista de la « Union Matematica Argentina », vol. XVII, Buenos Aires, 1955, pp. 293–297; *Selecta*, XLVIII, t. II, pp. 651–654; ed *Enti geometrici collegati con coppie di elementi curvilinei spaziali*, « Rend. di Mat. e d. sue Appl. Roma », s. v., vol. XIV, 1954–55, pp. 439–454.

(5) Questa idea della proiezione da due centri distinti (invece che da un solo centro, come era occorso a G. Halphen per introdurre il *piano principale* ed a me per la *retta* e per il *punto* principali relativi a due elementi) era già servita al TERRACINI nella Nota: *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi piani osculatori*, « Rend. Semin. Univ. e Polit. di Torino », vol. 13, 1952–53, pp. 265–281; e *Selecta*, t. II., pp. 570–585.

piano, del piano principale relativo ai due E^3 e dei loro piani osculatori è l'invariante da me introdotto.

In questa Nota dò un procedimento (diverso da quelli usati dal Terracini e da me) per trovare detto invariante; e proseguo la ricerca per elementi d'ordine più elevato fino alla determinazione di un riferimento intrinseco.

Aggiungo inoltre l'analoga trattazione per due elementi che abbiano lo stesso piano osculatore, ma diversi E^2.

2. Si considerino due elementi curvilinei del 3° ordine $\underset{1}{E}^3, \underset{2}{E}^3$ con lo stesso centro O e la stessa tangente (non di flesso), ma con piani osculatori distinti.

In un sistema di coordinate proiettive non omogenee x, y, z che abbia per origine il centro O e per asse x la tangente comune $t\,(y = z = 0)$ siano $y = 0, z = 0$ i piani osculatori ai due elementi: questi si possono rappresentare con le equazioni

$$(2.1) \qquad \underset{1}{E}^3 \begin{cases} y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4] \\ z = m x^3 + [4] \end{cases} , \qquad \underset{2}{E}^3 \begin{cases} y = n x^3 + [4] \\ z = b_2 x^2 + b_3 x^3 + [4] \end{cases} \text{[6]}.$$

Cerchiamo ora le condizioni affinché una quadrica Q contenga i due elementi dati (cioè affinché l'equazione scritta sia soddisfatta a meno di [4]).

Si trova che il piano tangente a tutte quelle quadriche in O ha l'equazione $b_2 y + a_2 z = 0$ (e coincide col piano principale dei due E^3).

Poiché per ipotesi la tangente ai due E^3 non è di flesso, quindi $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, questo piano è certo distinto dai due piani osculatori e quindi può assumersi un riferimento in cui esso sia $y + z = 0$ (cioè $a_2 = b_2 = a \neq 0$).

3. Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariati gli elementi finora fissati del riferimento sono del tipo:

$$(3.1) \qquad x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - P} , \quad y = \frac{\rho y'}{1 - P} , \quad z = \frac{\rho z'}{1 - P}$$

con $P = \lambda x' + \mu y' + \nu z'$.

Indichiamo la rappresentazione dei due elementi nelle nuove coordinate con

$$(3.2) \qquad \begin{cases} y' = a' x'^2 + a'_3 x'^3 + [4] \\ z' = m' x'^3 + [4] \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = n x'^3 + [4] \\ z' = a' x'^2 + b'_3 x'^3 + [4]. \end{cases}$$

Le relazioni fra i nuovi coefficienti (con apice) e gli antichi (senza apice) sono

$$(3.3) \qquad \rho a' = \alpha^2 a , \ \rho a'_3 = \lambda\alpha^2 a + 2\,\alpha\beta a^2 + \alpha^3 a_3 , \ \rho m' = \alpha^3 m$$
$$\rho b'_3 = \lambda\alpha^2 a + 2\,\alpha\gamma a^2 + \alpha^3 b_3 , \ \rho n' = \alpha^3 n.$$

(6) La notazione $[s]$, che chiamo *indeterminazione*, indica termini arbitrari di ordine $\geq s$ in x.

Se si prende $\rho = \alpha^2 a$ si ha $a' = 1$; se questa condizione è già soddisfatta per il riferimento iniziale (cioè $a = 1$) si ha $\rho = a^2$ per i cambiamenti che non alterano detta condizione. Analogamente si vede che si può fare $a'_3 = b'_3 = 0$, $m' = 1$ e se queste condizioni sono soddisfatte per il riferimento iniziale ($a_3 = b_3 = 0$, $m = 1$) esse lo sono pure per le trasformazioni per cui

$$\rho = \alpha = 1 \quad , \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}\lambda \tag{3.4}$$

cioè i due elementi possono scriversi sempre

$$\underset{1}{\mathrm{E}^3} \begin{cases} y = x^2 + [4] \\ z = x^3 + [4] \end{cases} \quad , \quad \underset{2}{\mathrm{E}^3} \begin{cases} y = nx^3 + [4] \\ z = x^2 \;+ [4] \end{cases} \tag{3.5}$$

e i cambiamenti di riferimento che non alterano questa rappresentazione sono dati da

$$x = \frac{x' - \frac{1}{2}\lambda(y' + z')}{1 - \mathrm{P}} \quad , \quad y = \frac{y'}{1 - \mathrm{P}} \quad , \quad z = \frac{z'}{1 - \mathrm{P}} \tag{3.6}$$

con

$$\mathrm{P} = \lambda x' + \mu y' + \nu z'. \tag{3.7}$$

Le (3.6–7) possono interpretarsi come omografie che lasciano invariati i due elementi dati; ne risulta che *n è invariante per questo gruppo di omografie.* Questo è l'invariante che avevo già trovato per altra via.

4. Vogliamo chiederci come le omografie considerate agiscano su un E^3 generico con la tangente $y = z = 0$.

Sia un tale E^3

$$\begin{aligned} y &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4] \text{ (7)} \\ z &= b_2 x^2 + b_3 x^3 + [4] \end{aligned} \tag{4.1}$$

e s'indichino con apici le variabili e i coefficienti dell'elemento trasformato E'^3.

Si hanno le relazioni

$$a'_2 = a_2 \,,\; b'_2 = b_2 \,,\; a'_3 = a_3 + \lambda a_2 (1 - a_2 - b_2) \,,\; b'_3 = b_3 + \lambda b_2 (1 - a_2 - b_2). \tag{4.2}$$

Le prime due indicano che *tutti gli E^2 con quella tangente restano inalterati per le ∞^3 omografie che lasciano fissi* $\underset{1}{\mathrm{E}^3}$, $\underset{2}{\mathrm{E}^3}$.

Si ha poi $a'_3 = a_3$ e $b'_3 = b_3$ in uno dei due casi:

I. $$a_2 + b_2 = 1$$

II. $$\lambda = 0.$$

Nel caso I in ciascuno piano $(1 - a_2) y = a_2 z$ del fascio che ha per asse la tangente fissata vi è un solo E^2 tale che gli ∞^2 E^3 per esso sono invarianti

(7) I coefficienti di questo E^3 non hanno alcuna relazione con i coefficienti indicati con le stesse lettere nelle 3.2.

per le omografie del gruppo G_3 (3.6), (3.7); mentre per un qualsiasi E^2 *diverso da quello non vi è alcun* E^3 *invariante.*

In totale vi sono dunque soltanto ∞^3 E^3 *invarianti.*

Nel caso II, vien definito un sottogruppo G_2, *tale che per le sue omografie ciascuno degli* ∞^4 E^3 *con quella tangente è invariante.*

5. Passiamo ora ad esaminare due E^4 i cui E^3 siano già ridotti alle forme canoniche (3.5) (e per l'invarianza delle quali siano ammissibili le trasformazioni (3.6), (3.7)); siano essi

$$\underset{1}{E}^4 \begin{cases} y = x^2 + a_4 x^4 + [5] \\ z = x^3 + px^4 + [5] \end{cases}, \quad \underset{2}{E}^4 \begin{cases} y = nx^3 + qx^4 + [5] \\ z = x^2 + b_4 x^4 + [5]. \end{cases}$$

Se si adopera una delle trasformazioni ora dette, e s'indicano con apici i coefficienti trasformati nelle nuove variabili risulta $p' = p + \lambda/2$. Si può quindi determinare λ in modo che sia $p' = 0$; e se già si suppone $p = 0$ questo valore è conservato per $\lambda = 0$.

Si ha in conseguenza $a'_4 = a_4 + \mu$ e si può scegliere μ in modo che risulti $a'_4 = 0$; se già per il sistema iniziale è $a_4 = 0$ questo valore si conserva per $\mu = 0$. Si trova poi che le trasformazioni per cui $\lambda = \mu = 0$ lasciano invarianti n, q e danno $b'_4 = b_4 + \nu$. Sicché si può scegliere ν in modo che $b'_4 = 0$; e se già in partenza è $b_4 = 0$ questo valore si conserva per $\nu = 0$. Si ha quindi:

Due E^4 *tangenti, con piani osculatori distinti (e a contatto esattamente del* 2° *ordine con i rispettivi* E^4) *determinano in modo unico un riferimento proiettivo rispetto al quale si rappresentano con le equazioni*:

$$\underset{1}{E}^4 \begin{cases} y = x^2 + [5] \\ z = x^3 + [5] \end{cases}, \quad \underset{2}{E}^4 \begin{cases} y = nx^3 + qx^4 + [5] \\ z = x^2 + [5] \end{cases}$$

n, q *sono due invarianti proiettivi.*

Poiché il riferimento è ora determinato un $E^s \supset \underset{1}{E}^4$ (o $\underset{2}{E}^4$) con $s > 4$ aggiunge ai precedenti $2(s - 4)$ invarianti.

6. Del tutto differente è il comportamento di due elementi con la stessa tangente e con lo stesso piano osculatore (ma *non* con lo stesso E^2) (8).

Siano i due elementi $\underset{1}{E}^5$, $\underset{2}{E}^5$ (ai quali ci riferiamo senz'altro poiché con elementi d'ordine inferiore non si arriva a determinare un riferimento):

$$\text{(6.1)} \quad \begin{array}{l} \underset{1}{E}^5 \begin{cases} y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + [6] \\ z = mx^3 + px^4 + \nu x^5 + [6] \end{cases} \\ \underset{2}{E}^5 \begin{cases} y = b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + [6] \\ z = mx^3 + qx^4 + sx^5 + [6] \end{cases} \end{array}, \qquad \begin{array}{l} a_2 \neq 0, b_2 \neq 0 \\ b_2 \neq a_2 \\ m \neq 0, n \neq 0 \end{array}$$

(8) Questo caso è stato considerato anzitutto da C. Segre e poi da molti altri Autori in lavori indicati nella Nota di A. Terracini citata in (5); però in nessuno ho trovato la ricerca spinta fino alla determinazione di un riferimento intrinseco.

ed esaminiamo come vari la loro rappresentazione per effetto della trasformazione (P essendo definito dalla (3.7))

$$(6.2)\qquad x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - P} \quad , \quad y = \frac{\rho y' + \sigma z'}{1 - P} \quad , \quad z = \frac{\tau z'}{1 - P} ;$$

i coefficienti nella nuova rappresentazione saranno indicati con le stesse lettere dotate di apici.

Limitandoci per ora ad $\underset{1}{E}^4$ si trovano le relazioni

$$(6.3)\qquad \begin{aligned} &\rho a_2' = \alpha^2 a_2 \, , \; \rho a_3' = -\alpha^2 \lambda a_2' - \sigma m' + 2\,\alpha\beta\, a_2\, a_2' + 2\,\alpha^2 \lambda a_2 + \alpha^3 a_3 \\ &\tau m' = \alpha^3 m \, , \; \tau p' = -\alpha^3 \lambda m' + 3\,\alpha^2 (\beta a_2' + \alpha\lambda) + p\alpha^4 \end{aligned}$$

e un'altra relazione che lega a_4' e a_4.

Da quelle scritte si deduce facilmente che si può sempre scegliere il riferimento in modo che siano: $a_2 = m = 1$, $a_3 = p = 0$ e che questi valori rimangano invariati per

$$(6.4)\qquad \rho = \alpha^2 \, , \; \sigma = -\frac{1}{3}\lambda\alpha^2 \quad , \quad \tau = \alpha^3 \, , \; \beta = -\frac{2}{3}\alpha\lambda .$$

Con queste precisazioni semplificatrici passiamo ad esaminare come agisca la trasformazione su $\underset{2}{E}^4$. Si trova subito che b_2 , n *sono invarianti* (9) e inoltre che (in forza delle (6.4))

$$q' = 2\,\lambda n\,(1 - b_2) + \alpha q .$$

Poiché $b_2 \neq 1$, $n \neq 0$ si può determinare λ/α $(\alpha \neq 0)$ in modo che $q' = 0$ e se già per il riferimento iniziale è $q = 0$ questo valore si conserva se e solo se $\lambda = 0$, quindi alle (6.4) si sostituiscono ora le

$$(6.5)\qquad \rho = \alpha^2 \quad , \quad \tau = \alpha^3 \quad , \quad \beta = \lambda = \sigma = 0 .$$

La relazione fra a_4' e a_4 diviene

$$\alpha a_4' = \alpha^3 a_4 + \alpha\mu + 2\,\gamma ;$$

si possono quindi scegliere α, γ e μ in modo che $a_4' = 0$; e se per il riferimento iniziale è $a_4 = 0$ questo valore è conservato per

$$(6.6)\qquad \alpha\mu + 2\,\gamma = 0 .$$

Se si osserva ora l'effetto di queste trasformazioni su $\underset{2}{E}^4$ si trova

$$(6.7)\qquad b_3' = \alpha b_3 \quad , \quad \alpha b_4' = \alpha\mu b_2^2 + 2\,\gamma b_2 + \alpha^3 b_4 .$$

La seconda mostra che si può fare $b_4' = 0$ e se già $b_4 = 0$ questo valore si conserva se $\alpha\mu b_2 + 2\,\gamma = 0$; combinando questa con la (6.6) poiché $b_2 \neq 1$, $\alpha \neq 0$ si ha $\mu = \gamma = 0$.

(9) Il coefficiente b_2 è il noto invariante di Mehmke–C. Segre.

Dalla prima (6.7) se $b_3 \neq 0$ si può scegliere α in modo che sia $b'_3 = 1$ e se già $b_3 = 1$ questo valore viene conservato per le trasformazioni per cui $\alpha = 1$.

Se invece $b_3 = 0$ è anche $b'_3 = 0$ qualunque sia α.

Siamo quindi condotti a distinguere due casi:

I° caso.

$$\underset{1}{E^5} \begin{cases} y = x^2 + a_5 x^5 + [6] \\ z = x^3 + \nu x^5 + [6] \end{cases} , \quad \underset{2}{E^5} \begin{cases} y = b_2 x^2 + x^3 + b_5 x^5 + [6] \\ z = n x^3 + s x^5 + [6] \end{cases}$$

con le trasformazioni

$$x = \frac{x'}{1 - \nu z'} \quad , \quad y = \frac{y'}{1 - \nu z'} \quad , \quad z = \frac{z'}{1 - \nu z'} .$$

Si può determinare ν in modo che $a'_5 = 0$; e se già $a_5 = 0$ questo valore rimane per $\nu = 0$. Sicché si ha la *forma canonica*

$$\underset{1}{E^5} \begin{cases} y = x^2 + [6] \\ z = x^3 + \nu x^5 + [6] \end{cases} , \quad \underset{2}{E^5} \begin{cases} y = b_2 x^2 + x^3 + b_5 x^5 + [6] \\ z = n x^3 + s x^5 + [6] \end{cases}$$

che individua il riferimento; i coefficienti letterali sono invarianti della coppia di elementi.

II° caso.

$$\underset{1}{E^5} \begin{cases} y = x^2 + a_5 x^5 + [6] \\ z = x^3 + \nu x^5 + [6] \end{cases} , \quad \underset{2}{E^5} \begin{cases} y = b_2 x^2 + b_5 x^5 + [6] \\ z = n x^3 + s x^5 + [6] \end{cases}$$

con le trasformazioni

$$x = \frac{\alpha x'}{1 - \nu z'} \quad , \quad y = \frac{\alpha^2 y'}{1 - \nu z'} \quad , \quad z = \frac{\alpha^3 z'}{1 - \nu z'}$$

Si può fare come sopra $a_5 = 0$ per $\nu = 0$: mentre

$$r' = \alpha^2 r \quad , \quad b'_5 = \alpha^3 b_5 \quad , \quad s' = \alpha^2 s$$

quindi si hanno due ulteriori invarianti differenziali (e un determinato riferimento intrinseco) a meno che $\nu = b_5 = s = 0$ nel qual caso α rimane ancora indeterminato.