Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Samuel Wolfenstein

Valeurs normales dans un groupe réticulé

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 337–342.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_337_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Algebra. — *Valeurs normales dans un groupe réticulé.* Nota di SAMUEL WOLFENSTEIN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Sia G un gruppo reticolato, M un l–sottogruppo convesso di G (ossia un sottogruppo convesso che in pari tempo sia un sottoreticolo per l'ordine indotto). Si dice che M è un *valore* di G se M è interirriducibile nel reticolo di tutti gli l–sottogruppi convessi di G; e ch'esso è un *valore normale* se M è invariante entro l'l–sottogruppo convesso che lo ricopre.

In questa Nota vengono stabilite quattro condizioni necessarie e sufficienti affinché un valore M risulti normale. La più utile fra queste è la seguente: M è normale se, e soltanto se, esiste un x di $G^+ \setminus M$ tale che, per ogni y di $G^+ \setminus M$, v'è un intero razionale n ed un elemento m di M tale che $m + x < ny$. Questo criterio viene utilizzato per mostrare che, se un l–sottogruppo convesso massimale M di G non è invariante, il suo normalizzatore N o si riduce ad M oppure è un sottogruppo proprio di G tale che N/M risulta isomorfo al gruppo additivo degli interi razionali. Da ultimo vengono caratterizzati i gruppi reticolati in cui ogni valore risulta normale, mostrando fra l'altro ch'essi costituiscono una varietà di gruppi reticolati.

Il est bien connu (voir, par exemple, [4], p. 50) que si, dans un groupe *totalement* ordonné, M et M* sont des sousgroupes convexes tels que M* couvre M dans la chaîne des sousgroupes convexes de G, alors M est distingué dans M*. On étudiera ici la question de l'existence d'une propriété analogue dans les groupes réticulés.

Soit G un groupe réticulé, M un sous–groupe de G. On dit que M est un *sous–groupe régulier* ou *valeur* de G, si c'est un l–sousgroupe convexe (c'est à dire, un sousgroupe convexe et filtrant, donc un soustreillis pour l'ordre induit) et s'il est inter–irréductible dans le treillis des l–sous–groupes convexes de G. On dira que M est une *valeur normale*, si elle est distinguée *dans le l–sousgroupe convexe qui la couvre*. Byrd ([1], Proposition 6.12) a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur soit normale. Nous établirons des conditions équivalents, ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les valeurs d'un groupe réticulé soient normales. En particulier, nous montrerons que les groupes qui vérifient cette condition (qu'on appelera les groupes *à valeurs normales*) forment une variété de groupes réticulés.

Dans ce qui suit, G sera toujours un groupe réticulé noté additivement (sans qu'on le suppose commutatif). Si C est un l–sous–groupe convexe de G on notera $\mathfrak{R}$ (C) l'ensemble de classes à droite de C ordonné par la relation:

$$C + x \leq C + y \quad \text{s'il existe un } c \text{ de C tel que} \quad x \leq c + y.$$

Si $\mathfrak{R}$ (C) est totalement ordonné par cette relation, C est appelé un sous–groupe premier de G. [3] (Théorème 1.7, p. 27) donne plusieurs définitions

(*) Nella seduta del 9 marzo 1968.

équivalentes d'un sous-groupe premier, dont il résulte en particulier que tout sous-groupe régulier est premier. Si M est un sous-groupe régulier, on note M^* le l-sous-groupe convexe qui couvre M, et, pour chaque élément g de $M^* \setminus M$, on dira que M est une *valeur de g*. On écrit x^y pour $-y+x+y$. Pour le reste, les notation et terminologie sont celles de [3], dont on suppose les résultats principaux connus.

Dans le théorème suivant, l'équivalence de i) et de ii) est due à Byrd.

THÉORÈME 1. – Soit G un groupe réticulé, M un sous-groupe régulier de G, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) M est une valeur normale;

ii) Pour tout élément positif y de M^* et tout m de M, il existe un entier rationnel n tel que $M + y^m \leq M + ny$;

iii) Pour tout élément positif y de M et toute suite finie $m_1, \cdots, m_r$ d'éléments de M, il existe un entier rationnel n tel que $M + y^{m_1} + \cdots + y^{m_r} \leq M + ny$;

iv) Il existe un x de $G^+ \setminus M$ tel que pour chaque y de $G^+ \setminus M$ il existe un entier rationnel n pour lequel $M + ny > M + x$.

Démonstration. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est immédiate: en effet, si M est une valeur normale, $M + y^m = M + y$. iii) s'obtient à partir de ii) par une récurrence facile sur r. Supposons que la condition iii) soit vérifiée, soit x un élément positif de $M^* \setminus M$, $y \in G^+ \setminus M$. x appartenant au l-sous-groupe convexe M^* de G engendré par M et par y, il existe, d'après le Lemme de Clifford ([3], p. 25), des éléments $a_0, \cdots, a_r$ de M tels que

$$x < a_0 + y + a_1 + \cdots + y + a_r$$
$$= m_0 + y^{m_1} + \cdots + y^{m_r}, \qquad \text{avec} \quad m_i \in M, \qquad i = 0, \cdots, r.$$

Donc il existe un entier rationnel n tel que $M + ny > M + x$.

Pour démontrer que iv) implique i), on utilisera le

LEMME. Soit M un sous-groupe premier de G, $M + x > M$, alors, pour tout m de M, $M + m^x < M + x$.

En effet, $\mathfrak{R}(M)$ étant totalement ordonné, on peut raisonner par l'absurde en supposant que $M + x \leq M + m^x$. Cela veut dire qu'il existe un m' de M tel que $x \leq m' - x + m + x$, donc $x \leq m + m'$, et $M + x \leq M$, ce qui contredit l'hypothèse que $M + x > M$.

Supposons maintenant que M et x vérifient la condition iv). Il est clair que M est une valeur de x et, par conséquent, que $M' = -x + M + x$ est une valeur de x. On va montrer que $M = M'$. En effet, deux valeurs distinctes d'un seul élément ne pouvant pas être comparables, $M' \neq M$ entraînerait l'existence d'un élément positif m de M tel que $m^x \notin M$. Alors iv) implique qu'il existe un entier rationnel n tel que

$$M + n(m^x) = M + (nm)^x > M + x,$$

ce qui contredit le Lemme.

Puisqu'on a $M + x = x + M$, il en résulte que M^*, qui est le l–sous-groupe convexe de G engendré par M et par x, est donné par:

$$M^* = \{g \in G \mid \exists\, m \in M\,,\, n \in \mathbf{Z} : |g| \leq m + nx\}.$$

Donc pour chaque g de M^* il existe un entier rationnel p tel que

$$M + px \leq M + g < M + (p + 1)\,x.$$

Posons $z = g - px$. Nous devons montrer qu'on a $z + M = M + z$. C'est évidemment le cas si $z \in M$, donc on peut supposer que $M < M + z < M + x$. Soit m un élément quelconque de M, n un entier rationnel. Alors, d'après le Lemme, on a

$$M + nm^z = M + (nm)^z < M + z < M + x.$$

Mais, dans ce cas, la condition iv) implique que, si m est positif, m^z est dans M. On a donc $z + M^+ = M^+ + z$, et, M étant engendré par ses éléments positifs, il en résulte que $z + M = M + z$. Cela achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1. – Soit C un l–sous–groupe convexe de G. S'il existe dans $\mathfrak{R}$ (C) un élément inter–irréductible, alors C est une valeur normale de G.

En effet, l'existence d'un élément inter–irréductible dans $\mathfrak{R}$ (C) implique l'existence d'un unique élément $C + x$ qui couvre C. Alors il est clair que C est une valeur de x, et la condition iv) du théorème implique que C est une valeur normale.

Tous les autres résultats connus concernant les valeurs normales s'obtiennent très facilement à partir de ce thèorème en utilisant le critère iv). Notons deux résultats importants.

Une valeur de G est dite *spéciale* s'il existe un élément de G dont c'est l'unique valeur.

COROLLAIRE 2. – Toute valeur spéciale est normale (voir [2], Prop. 2.4).

En effet si M est l'unique valeur de x et $y \notin M$, alors x est contenu dans le l–sous–groupe convexe principal de G engendré par y (sinon y appartiendrait à une valeur de x). Cela veut dire qu'il existe un entier rationnel n, tel que $|x| \leq n\,|y|$.

Deux éléments x et x' d'un groupe réticulé sont dits *archimédiennement équivalents* s'il existe d'entiers rationnels n et n' tels que $|x| \leq n\,|x'|$ et $|x'| \leq n'\,|x|$; si G est un l–sous–groupe de G′ et chaque élément de G′ est archimédiennement équivalent à un élément de G, on dit que G′ est une extension archimédienne de G. S'il en est ainsi, on montre facilement que, pour chaque valeur M de G′, $M \cap G$ est une valeur de G. La proposition suivante est donc conséquence immédiate de la condition iv) du théorème.

COROLLAIRE 3. – Soit G′ une extension archimédienne de G, M un sous–groupe régulier de G′, alors $M \cap G$ est une valeur normale de G, si et seulement si M est une valeur normale de G′ ([1], Théorème 6.6.).

Dans le cas où M est une valeur non–normale, il est intéressant de savoir ce que peut être le normalisateur de M dans M*. Le théorème suivant donne une réponse à cette question:

THÉORÈME 2. – Soit G un groupe réticulé, M un sousgroupe premier maximal de G, N le normalisateur de M. Alors l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:

I) $N = G$;
II) $N = M$;
III) N est un sous–groupe propre de G et $N/M \simeq \mathbf{Z}$.

Démonstration. – Supposons que ni la condition I) ni la condition II) n'est vérifiee, soit y un élément positif de $N \setminus M$, x un élément de $G^+ \setminus M$ tel que

$$M + nx < M + y \text{ pour tout entier rationnel } n. \tag{1}$$

Il en existe d'après le Théorème 1. On va montrer que, dans ces conditions, on a

$$M + x < M + z \text{ pour tout élément positif } z \text{ de } N \setminus M. \tag{2}$$

En effet, le groupe N/M étant archimédien, pour chaque z de $N \setminus M$, il existe un entier rationnel n tel que $M + nz > M + y$. Or, si on suppose que $M + x \geq M + z$, on aurait $x \geq m + z$, pour un m de M, donc $nx \geq n(m + z) = m' + nz$, avec $m' \in M$, et $M + nx \geq M + nz > M + y$, ce qui contredit (1).

G étant engendré par M et par x, on a, d'après le Lemme de Clifford, $y \leq a_1 + x + a_2 + x + \cdots + a_{s-1} + x + a_s$, où les a_i sont des éléments de M. Posons $b = a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_s$. Alors

$$y < s(x + b) \qquad \text{avec} \quad b \in M. \tag{3}$$

Supposons maintenant que la condition III) n'est pas vérifiée non plus. Cela implique que le groupe N/M est o–isomorphe à un sous–groupe dense de $\mathbf{R}$, donc qu'il existe un élément positif z de $N \setminus M$ tel que

$$M + sz < M + y \tag{4}$$

D'après (2), il existe un m de M, tel que $x \leq m + z$, donc

$$x + b \leq m + z + b = m' + z, \qquad \text{avec} \quad m' \in M, \tag{5}$$

$$\text{et } s(x + b) \leq s(m' + z) = m'' + sz, \qquad \text{avec} \quad m'' \in M.$$

Enfin (4) et (5) impliquent que $M + s(x + b) < M + y$, qui ce que contredit (3). Cela achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. – On remarquera que, dans tous les cas, N est un l–sous–groupe de G. C'est vrai d'ailleurs pour le normalisateur d'un sous–groupe premier quelconque. En effet, soit G un groupe réticulé, P un sous–groupe premier de G, x un élément du normalisateur N de P. Du fait que P est premier, on a ([3], Théorème 1.7, p. 27) soit $x^+ \in P$, soit $x^- = x^+ - x \in P$, et, dans les deux cas, $x^+ \in N$. $x \in N$ entrainant $x^+ \in N$, il en résulte que N est un sous-treillis donc un l-sous-groupe de G.

Remarque 2. – Le Théorème 2 ne peut pas être amélioré sans hypothèse supplémentaire sur G ou sur M. En effet, les trois cas prévus dans l'énoncé peuvent tous se produire. Soit T un ensemble totalement ordonné. On note $\mathcal{S}(T)$ le groupe ordonné des permutations de T qui en préservent l'ordre, avec, comme loi de groupe, la loi de la composition des fonctions. Alors $G = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (resp. $G = \{x \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \mid x(t+1) = x(t) + 1, \forall t \in \mathbf{R}\}$), $M = \{x \in G \mid x(0) = 0\}$ vérifient la condition II) (resp. la condition III)) du théorème.

Soit Γ l'ensemble des valeurs de G. Une partie Δ de Γ est dite *plénière* si l'intersection de Δ se réduit à l'élément neutre et si Δ est un idéal dual de Γ. En particulier, chaque élément non-nul de G a au moins une valeur dans Δ.

THÉORÈME 3. – Soit G un groupe réticulé, Γ son ensemble de valeurs, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) G est un groupe à valeurs normales;

ii) Il existe un partie plénière Δ de Γ composé de valeurs normales;

iii) Pour tout a, b de G^+, $a + b \leq 2b + 2a$;

iv) Pour tout couple A, B de l-sous-groupes convexes de G, $A + B = B + A$.

Démonstration. – i) implique trivialement ii). Pour montrer que ii) implique iii), remarquons d'abord que, si Δ est une partie plénière de Γ, et si $x, y \in G^+$ sont tels que $M + x < M + y$ pour chaque valeur M de x dans Δ, alors $x < y$. En effet, si $z = (x - y)^+ > 0$, et si N est une valeur de z dans Δ, alors $N + x > N + y \geq N$; et si M est la valeur de x qui contient N (et qui appartient donc à Δ), $M + x \geq M + y$.

Supposons maintenant que la condition ii) est vérifiée. Si $a + b = 0$, nous avons trivialement égalité dans iii). Supposons donc que $a + b > 0$, et soit M une valeur de $a + b$. a et b appartiennent à M^*, donc, si M est une valeur normale, M^*/M étant un groupe commutatif, $M + 2b + 2a = M + 2(a+b) > M + a + b$; cela étant vrai pour chaque valeur M de $a + b$ dans Δ, on a bien $a + b < 2b + 2a$.

Supposons maintenant que la condition iii) est vérifiée, et soit $x = a + b$, avec $a \in A$, $b \in B$. On a $-|a| - |b| \leq x \leq |a| + |b|$, donc, d'après iii), $-2|b| - 2|a| \leq x \leq 2|b| + 2|a|$ ou $0 \leq 2|b| + x + 2|a| \leq 4|b| + 4|a|$. Par le principe de décomposition de Riesz (voir [4], p. 64) on a donc $2|b| + x + 2|a| = b' + a'$, avec $0 \leq b' \leq 4|b|$, $0 \leq a' \leq 4|a|$, d'où $x \in B + A$.

Montrons enfin que iv) implique i). On peut remarquer tout de suite que, si la condition iv) est vérifiée, A + B est le l-sous-groupe de G engendré par A et B, parce qu'on démontre facilement que le sous-groupe de G engendré par une famille quelconque de l-sous-groupes convexes est encore un l-sous-groupe convexe. Donc, si M est une valeur de x, $y \in G \setminus M$, on a $x = m + y'$, avec $m \in M$, $y' \in Y$, où Y est le l–sous–groupe convexe principal de G engendré par y. Mais on sait que $Y = \{g \in G \mid \exists\, n \in \mathbf{Z}, |g| \leq n\,|y|\}$, donc la condition iv) du Théorème 1 est vérifiée et G est un groupe à valeurs normales.

COROLLAIRE 1. – Les groupes à valeurs normales forment une variété de groupes réticulés.

En effet, la condition iii) peut être écrite sous forme d'équation.

On dit qu'un groupe réticulé G est un groupe *à valeurs finies* (finite valued) si chaque élément de G n'a qu'un nombre fini de valeurs, ou (condition équivalente) si chaque valeur de G est spéciale. Si les valeurs spéciales de G forment une partie plénière de son ensemble de valeurs on dira que G est un s–groupe. Nous avons donc, comme conséquence du Corollaire 2 du Théorème 1, de la condition ii) du Théorème 2 et du corollaire précédent:

COROLLAIRE 2. – Tout l–sous–groupe d'un s–groupe est un groupe à valeurs normales. En particulier, tout produit sous–direct de groupes à valeurs finies est un groupe à valeurs normales.

Le cas particulier d'un groupe *représentable* (i.e. comme produit sous–direct de groupes totalement ordonnés) avait déjà été remarqué par Byrd (voir [3], Théorème 1.8, Corollaire 3, p. 32).

On donne, pour conclure, une proposition concernant les extensions archimédiennes des groupes à valeurs normales:

PROPOSITION 1. – Soit G′ un groupe à valeurs normales, G un l–sous–groupe de G′, et notons C′ le l–sous–groupe convexe de G′ engendré par le l–sous–groupe convexe C de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) L'application $M \mapsto M'$ définit une bijection des valeurs de G sur celles de G′;

ii) L'application $M \mapsto M \cap G$ définit une bijection des valeurs de G′ sur celles de G;

iii) G′ est une extension archimédienne de G.

La condition ii), donnée dans [5] comme définition d'une extension archimédienne commutative d'un groupe réticulé commutatif, reste donc valable pour une classe plus étendue de groupes réticulés; mais on ignore si la proposition ci–dessus reste vraie pour G′ un groupe réticulé quelconque (même si on suppose que G est un groupe à valeurs normales).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. BYRD, *Thèse*, Tulane Univ., 1966.

[2] P. CONRAD, *Archimedean Extensions of Lattice–Ordered Groups*, « Jnl. Ind. Math. Soc. », ns. 30, 131–160 (1966).

[3] IBID., *Introduction à la théorie des groupes réticulés*, Paris 1967. Secretariat Math. Inst. H. Poincaré.

[4] L. FUCHS, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon, Oxford 1963.

[5] S. WOLFENSTEIN, *Sur les groupes réticulés archimédiennement complets*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *262*, A–813–816 (1966).