Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosanna Villella Bressan

A proposito di un problema al contorno per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 327–332.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_327_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Matematica. — *A proposito di un problema al contorno per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.* Nota di ROSANNA VILLELLA BRESSAN, presentata [*] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — In this paper a theorem on ordinary second order differential equations which is known to hold in the case of continuous functions is extended to the case of functions which are measurable with respect to one variable and continuous with respect to the other variables.

In questa Nota [1] mi propongo di trasportare al caso delle funzioni misurabili rispetto ad una variabile e continue rispetto alle rimanenti un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, il quale ha ricevuto successive formulazioni da parte di Cacciopoli [2], Scorza Dragoni [3] e Tonelli [4] nel caso delle funzioni continue. Il teorema che mi propongo di dimostrare è il seguente:

Se $f(x, y, y')$ è una funzione reale di variabili reali definita nell'insieme dei punti dello spazio con l'ascissa contenuta nell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x_1, continua rispetto a (y, y') e misurabile rispetto a x e tale che scelti comunque i numeri $c > 0$ e $\sigma > 0$ si possa trovare un numero positivo d in modo da aversi

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|f(x, y, y')| < |y'| + d && \text{se} \quad |y| \leq c, \\ &f(x, y, y') > -\sigma(|y| + |y'|) - d && \text{se} \quad y > c, \\ &f(x, y, y') < \sigma(|y| + |y'|) + d && \text{se} \quad y < -c, \end{aligned}$$

il problema

$$(2)\qquad y'' = f(x, y, y'), \; y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1$$

ammette soluzioni, nel senso che esistono nell'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$ funzioni, $y(x)$, assolutamente continue insieme con le rispettive derivate prime per le quali risulta $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ e *$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ quasi ovunque.*

(*) Nella seduta del 9 marzo 1968.

(1) Redatta nell'ambito dell'attività dei gruppi matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) R. CACCIOPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e unicità ed alcune sue applicazioni*, « Rendiconti del Seminario Mat. della R. Università di Padova », *3*, 1–15, n. 4 (1932).

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine*, « Rendiconti del Seminario Mat. di Roma », *2*, 177–215, nn. 2–18 (1938).

(4) L. TONELLI, *Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, *8*, 75–88, n. 2 (1939).

Nel caso che $f(x, y, y')$ sia per di più continua questo teorema è stato già enunciato, sia pure senza una dimostrazione esplicita. Precisamente esso è enunciato nelle *Lezioni di Analisi* di Severi e Scorza Dragoni [5], dove si afferma altresì che la sua dimostrazione si può conseguire modificando leggermente un ragionamento di Scorza Dragoni. Nel n. 1 di questa Nota richiamerò appunto questo ragionamento. Resterebbe da vedere se le costanti σ e d non si possano sostituire anche nel teorema attuale con delle funzioni sommabili, in analogia con quanto ha fatto Tonelli nel caso continuo [6].

1. – Incominciamo col dimostrare che il problema (2) è risolubile se $f(x, y, y')$ è continua e soddisfa alle condizioni (1) [7].

Sia p il numero naturale che soddisfa alla condizione $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} < 8 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}$. Posto $a = \frac{1}{2p(x_1 - x_0)}$, si scelga il numero positivo ϑ_0 in modo che $2^{-a\vartheta} \geq 1/2$ se $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$. Si indichi con k un numero soddisfacente alle

$$k > 0 \quad , \quad k < 1, \tag{3}$$

alle

$$k < \frac{a}{2} \log 2 \quad , \quad k < \frac{1 - 2^{-a\vartheta_0}}{x_1 - x_0} \quad , \quad k < \frac{4}{x_1 - x_0} \log 2 \tag{4}$$

e alla

$$1 - pk(x_1 - x_0) - k^2(x_1 - x_0) > 0 . \tag{5}$$

Fissati in tal modo k e p, scegliamo i numeri positivi c e d in modo tale che sia

$$f(x, y, y') \geq -\frac{k^{p+2}}{2}(|y| + |y'|) - d \qquad \text{se} \quad y \geq c,$$

$$f(x, y, y') \leq \frac{k^{p+2}}{2}(|y| + |y'|) + d \qquad \text{se} \quad y \leq -c.$$

(5) F. Severi e G. Scorza Dragoni, *Lezioni di Analisi*, Bologna, Zuffi, *3*, 146–147 (1951).

(6) *Loc. cit.* (4), nn. 1 e 3. In questo lavoro, in una nota a pie' di p. 76, Tonelli indica anche due vie diverse per completare un ragionamento di Mambriani in guisa da renderlo atto a fornire anche la dimostrazione di un teorema enunciato da Scorza Dragoni. Peraltro, mentre la seconda delle strade indicate da Tonelli si può effettivamente percorrere fino in fondo, lo stesso non mi sembra si possa dire per la prima. Per avere un esempio in cui questa prima via non porta ancora alla conclusione basta considerare proprio quello che si trova nel n. 48 della Memoria di Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di un'equazione differenziale del secondo ordine*, «Giornale di Matematiche di Battaglini», *69*, 77–112 (1931).

(7) Nelle condizioni attuali alle soluzioni del problema (2) imporremo di essere continue insieme con le loro derivate prime.

Allora, se u è un numero soddisfacente alle

$$u \geq 4c \quad , \quad u \geq \frac{8d}{k^{p+2}} , \tag{6}$$

risulta anche

$$f(x, y, y') \geq -k^{p+2}(|y| + |y'|) - d \qquad \text{se} \quad y \geq \frac{u}{4} ,$$

$$f(x, y, y') \leq k^{p+2}(|y| + |y'|) + d \qquad \text{se} \quad y \leq -\frac{u}{4} .$$

E basta ripetere il procedimento seguito nel n. 14 del lavoro citato in (3) per poter affermare che se $y(x)$ è un integrale dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$ soddisfacente alle $y(\xi_0) < -u/2$, $y'(\xi_0) = 0$ $(x_0 \leq \xi_0 < x_1)$ e alla $y'(x) \geq 0$ $(\xi_0 \leq x \leq \xi, \xi_0 < \xi \leq x_1)$, risulta

$$y(\xi) \leq 2^{-\lambda} y(\xi_0) , \tag{7}$$

con $\lambda = \dfrac{\xi - \xi_0}{2(x_1 - x_0)}$.

Facciamo ora vedere che se ad u viene imposto ulteriormente di soddisfare alle

$$u > 4|y_0| \quad , \quad u > 4|y_1| , \tag{8}$$

allora ogni eventuale soluzione del problema (2) si deve mantenere in modulo minore o uguale ad u in tutto l'intervallo chiuso, I, di estremi x_0 e x_1.

Infatti si supponga, per assurdo, che la soluzione, $y(x)$, del problema (2) assuma valori minori di $-u$. Sia i l'insieme chiuso costituito dagli estremi di I e dai punti di I nei quali risulti $y'(x) \leq 0$. Sia $y_1(x)$ la funzione nulla in i e uguale a $y'(x)$ negli altri punti di I. Siano $t_0 < x < \tau_0$, $t_1 < x < \tau_1, \cdots$, gli intervalli contigui ad i. La serie $(t_0 - \tau_0) + (t_1 - \tau_1) + \cdots$ è convergente e quindi risulta

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{n}^{\infty}{}_{\mu} \int_{t_\mu}^{\tau_\mu} y'(t)\, dt = 0 ,$$

cioè possiamo scegliere ρ in maniera da aversi

$$\sum_{\rho+1}^{\infty}{}_{\mu} \int_{t_\mu}^{\tau_\mu} y'(t)\, dt < \frac{u}{4\sqrt{2}} ; \tag{9}$$

inoltre possiamo scegliere ρ tanto grande che fra gli intervalli $t_0 \leq x \leq \tau_0, \cdots, t_\rho \leq x \leq \tau_\rho$ ce ne sia almeno uno in cui $y(x)$ assume valori minori di $-u$. Cambiando eventualmente i nomi possiamo supporre che sia $\tau_0 < t_1$, $\tau_1 < t_2, \cdots, \tau_{\rho-1} < t_\rho$. Non è nemmeno ristrettivo supporre $y(t_0) < -u$.

All'intervallo $t_0 \leq x \leq \tau_0$ possiamo allora applicare la (7); e si trova

$$y(\tau_0) \leq 2^{\frac{t_0-\tau_0}{2(x_1-x_0)}} y(t_0) < - 2^{\frac{t_0-\tau_0}{2(x_1-x_0)}} u < - \frac{u}{\sqrt{2}} ,$$

e quindi, tenuto conto della (9),

$$y(t_1) = y(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t_1} y'(t)\, dt \leq - \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{4\sqrt{2}} < - \frac{u}{2} ;$$

ma allora la (7) può essere applicata anche all'intervallo $t_1 \leq x \leq \tau_1$; e si trova

$$y(\tau_1) \leq 2^{\frac{t_1-\tau_1}{2(x_1-x_0)}} y(t_1) = \left(y(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t_1} y'(t)\, dt\right) \cdot 2^{\frac{t_1-\tau_1}{2(x_1-x_0)}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{(t_0-\tau_0)+(t_1-\tau_1)}{2(x_1-x_0)}} y(t_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} y_1(t)\, dt \leq - \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{4\sqrt{2}} < - \frac{u}{2} ,$$

e quindi, tenuto conto della (9),

$$y(t_2) = y(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t_2} y'(t)\, dt \leq 2^{\frac{(t_0-\tau_0)+(t_1-\tau_1)}{2(x_1-x_0)}} y(t_0) + \int_{\tau_0}^{t_1} y_1(t)\, dt + \int_{\tau_1}^{t_2} y_1(t)\, dt \leq$$

$$\leq - \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{4\sqrt{2}} < - \frac{u}{2} ;$$

e così di seguito.

Se $\tau_\varrho = x_1$ si ha quindi $y(x_1) < -u/2$; se $\tau_\varrho < x_1$ si ha, ricordando la (9),

$$y(x_1) = y(\tau_\varrho) + \int_{\tau_\varrho}^{x_1} y'(t)\, dt \leq 2^{\frac{(t_0-\tau_0)+\cdots+(t_\varrho-\tau_\varrho)}{2(x_1-x_0)}} y(t_0) + \int_{\tau_0}^{t_1} y_1(t)\, dt + \cdots + \int_{\tau_\varrho}^{x_1} y_1(t)\, dt <$$

$$< - \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{u}{4\sqrt{2}} < - \frac{u}{2} ;$$

in ogni caso si giunge alla relazione assurda $y(x_1) < - \frac{u}{2} < y_1$.

In maniera analoga si riconosce che $y(x)$ non può nemmeno superare u.

Allora, a norma della prima delle (1), si può trovare una costante positiva, v, tale da aversi

$$(10) \qquad |y''(x)| \leq |y'(x)| + v ,$$

per ogni soluzione, $y(x)$, del problema (1). Detto $\bar{x}$ un punto di I in cui risulti $y'(\bar{x}) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = h$, dalla (10), atteso un lemma noto, risulta

$$(11) \qquad |y'(x)| \leq y'(\bar{x})\, e^{|x-\bar{x}|} + v(e^{|x-\bar{x}|} - 1) \leq h\, e^{x_1-x_0} + v(e^{x_1-x_0} - 1) = w ;$$

quindi

Scelto k *in modo da soddisfare alle* (3), (4) *e* (5); u *in modo da soddisfare alle* (6) *e* (8); v *in modo che valga la* (10) *e definito* w *in base alla* (11) *le eventuali soluzioni*, $y(x)$, *del problema* (2) *soddisfano alle* $|y(x)| \leq u$, $|y'(x)| \leq w$, $|y''(x)| \leq v + w$.

Sia m il massimo di $|f(x, y, y')|$ nell'insieme $x_0 \leq x \leq x_1$, $|y| \leq u$, $|y'| \leq w$. La funzione $\varphi(x, y, y')$ definita ponendo

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y, y') = f(x, y, y') &&\text{se } |f(x,y,y')| \leq m, \\ &\varphi(x, y, y') = m &&\text{se } f(x, y, y') > m, \\ &\varphi(x, y, y') = -m &&\text{se } f(x, y, y') < -m, \end{aligned}$$

è continua e limitata in tutto l'insieme $x_0 \leq x \leq x_1$. Quindi il problema al contorno

$$y'' = \varphi(x, y, y') \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1 \tag{12}$$

ammette soluzioni. Inoltre le disuguaglianze (1) sono soddisfatte, con i medesimi valori delle costanti c, σ e d, anche se si sostituisce f con φ. Ma allora, a norma di quanto si è detto sopra, le curve integrali del problema (12) si mantengono nell'insieme $x_0 \leq x \leq x_1$, $|y| \leq u$, $|y'| \leq w$. E in questo insieme f e φ coincidono, quindi le soluzioni del problema (12) sono anche soluzioni del problema (2).

2. – La funzione $f(x, y, y')$ sia ora misurabile rispetto a x e continua rispetto a (y, y') nell'insieme, S, dei punti dello spazio con l'ascissa contenuta nell'intervallo I. Allora dato il numero positivo ε e il numero naturale μ esiste una porzione chiusa, i_μ, di I tale che la sua misura superi $x_1 - x_0 - \varepsilon/2^{\mu+1}$ e tale che $f(x, y, y')$ subordini una funzione continua nell'insieme chiuso costituito dai punti (x, y, y') di S tali che $x \in i_\mu$, $|y| \leq \mu$, $|y'| \leq \mu$ (8). L'insieme $\delta(\varepsilon) = \cap\, i_\mu$ è chiuso e ha una misura maggiore di $x_1 - x_0 - \varepsilon$, e la funzione $f(x, y, y')$ subordina una funzione continua nell'insieme chiuso costituito dai punti di S con l'ascissa contenuta in $\delta(\varepsilon)$.

Detto e_n $(n = 1, 2, \cdots)$ l'insieme chiuso costituito dagli estremi di I e da $\delta(1) \cup \cdots \cup \delta(1/n)$, la successione $e_1, e_2, \cdots$, è monotona crescente. E la funzione $f(x, y, y')$ subordina una funzione continua in ciascuno degli insiemi costituiti dai punti di S con l'ascissa contenuta in e_n.

Definiamo in S le funzioni $f_n(x, y, y')$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ponendo

$$f_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

se x appartiene a e_n,

$$f_n(x, y, y') = (f(x''_{\mu,n}, y, y') - f(x'_{\mu,n}, y, y')) \frac{x - x'_{\mu,n}}{x''_{\mu,n} - x'_{\mu,n}} + f(x'_{\mu,n}, y, y')$$

(8) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto a una e misurabili rispetto a un'altra variabile*, « Rendiconti del Sem. di Mat. di Padova », *17*, 102–106 (1948); G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*, « Ricerche di Matematiche », *1*, 30 (1952).

se $x'_{1,n} < x < x''_{1,n}$, $x'_{2,n} < x < x''_{2,n}$, $\cdots$ sono gli intervalli contigui a e_n e x è compreso fra $x'_{\mu,n}$ e $x''_{\mu,n}$.

Le funzioni $f_n(x, y, y')$ sono continue in tutto S. Inoltre se per la funzione $f(x, y, y')$ e per le costanti c, σ e d sono soddisfatte le disuguaglianze (1), le (1) sono soddisfatte anche con $f_n(x, y, y')$ al posto di $f(x, y, y')$ perché $f_n(x, y, y')$ coincide con $f(x, y, y')$ se $x \in e_n$ ed è compreso fra $f(x'_{\mu,n}, y, y')$ e $f(x''_{\mu,n}, y, y')$ se x appartiene all'intervallo $x'_{\mu,n} < x < x''_{\mu,n}$.

Il problema al contorno

$$y'' = f_n(x, y, y') \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

ammette quindi soluzioni per ogni n. E detta $y_n(x)$ una tale soluzione, le funzioni continue $y_1(x)$, $y'_1(x)$, $y''_1(x)$, $y_2(x)$, $y'_2(x)$, $y''_2(x)$, $\cdots$ sono equilimitate a norma della proposizione del n. 1. Quindi le funzioni $y_1(x)$, $y'_1(x)$, $y_2(x)$, $y'_2(x)$, $\cdots$ sono equicontinue. Epperò si può considerare una tal successione di numeri naturali $n_1 < n_2 < \cdots$, che le successioni $y_{n_1}(x)$, $y_{n_2}(x)$, $\cdots$ e $y'_{n_1}(x)$, $y'_{n_2}(x)$, $\cdots$ convergano uniformemente. E se $y(x)$ è il limite di $y_{n_\mu}(x)$ al divergere di μ, la successione $f_{n_1}(x, y_{n_1}(x), y'_{n_1}(x))$, $f_{n_2}(x, y_{n_2}(x), y'_{n_2}(x))$, $\cdots$ converge verso $f(x, y(x), y'(x))$ in tutto l'insieme $e = \cup\, e_n$ che ha la stessa misura di I. Ma allora, essendo le $f_n(x, y_n(x), y'_n(x))$ equilimitate, risulta

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{x_0}^{x} f_{n_\mu}(t, y_{n_\mu}(t), y'_{n_\mu}(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

per ogni x di I. E quindi

$$y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

in tutto l'intervallo I. E $y(x)$ è una soluzione del problema (2), atteso che risulta anche $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, come è ovvio.