Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Georges Bouligan

Nouveaux aspects du jeu des groupements dans la recherche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 323–326.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_323_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Matematica. — *Nouveaux aspects du jeu des groupements dans la recherche.* Nota di GEORGES BOULIGAND, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Considerazioni comparative di carattere metodologico riguardanti i seguenti argomenti. *Generalità*: microfenomeni, caso estremo di un effetto di strato limite; interdipendenza e separazione di scale in fatto di finitesimi. *Analisi matematica*: un raggruppamento non lineare in cui un giuoco siffatto si impone in modo esclusivo; applicazione ai campi funzionali alternatamente ellittici ed iperbolici.

INTRODUCTION.

Le chercheur perd du temps à négliger un préalable: qu'il s'agisse de nombres, de figures ou de thèmes plus sévères, il ne fera rien sans l'appui d'un cas prototype, dont le contenu peut éclairer une large zône. D'autres précautions sont à prendre: retenir les permanences historiques dans l'activité séculaire, et avant tout, ce fait que l'effort théorique résulte, et d'un courant vers les problèmes où il faut construire un élément inconnu, extrait d'une catégorie préfixée, par voie constructive; ce que l'histoire justifie pleinement, de Pythagore, Euclide, Archimède, à Poincaré, Planck, Einstein, voire Bourbaki, devant un courant synthétique ininterrompu.

SECTION I. – ANALYSE MATHÉMATIQUE ET PROBLÈME II.

Je vais maintenant descendre de la haute généralité au spécifié, ce qui peut guider à partir de notions ensemblistes. Pour fixer les idées, je vais les emprunter à la topologie. Autour d'une bille B, j'enroule une feuille de papier en cylindre vertical circonscrit à B. Un élastique à grand pouvoir constricteur permettra d'écraser la feuille sur la sphère qui limite B. Sa nature flexible produit alors des froissements et superpositions pouvant l'altérer en bloc. D'ailleurs, on peut varier ce microphénomène, soit qu'on s'en tienne à 2 boules B, B′ inscrites dans le cylindre et tangentes entre elles, soit qu'on en prenne une multitude, en vue d'emplir un sac de cellophane, pour mieux voir. Quand on s'en tient à deux, la déformation impitoyable de la feuille respecte toutefois la zône entre les deux équateurs horizontaux: pourtant si le papier a quelque raideur, on observe tout près de ces cercles un « effet de couche–limite », cas extrême des microphénomènes en cours d'étude [1].

Bien plus instructif, le recours à des billes innombrables fait apparaître des interdépendances entre ces derniers: à savoir entre les microbilles et la

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

paroi du sac une réduction très poussée de la calotte d'adhérence (les contaminations afférentes devenant inobservables). En outre, adviennent des changements d'échelles, au passage du diamètre des billes à celui de la zône de contact avec la dite paroi.

Le modèle très adéquat, ainsi offert à la microphysique, est loin d'en épuiser la haute variété: il faut bien que l'expérience intervienne. Du moins, en utilisant ce modèle, le théoricien garde-t-il l'avantage d'une économie de temps.

J'en viens aux *champs fonctionnels*, avec pour cas prototype *le calcul de la pression* au sein d'un volume liquide en mouvement partout irrotationnel et permanent, en partant des valeurs périphériques de ladite pression: voilà bien un problème Π de type elliptique.

Section II. – Méthode.

Pour obtenir les Π normaux, j'écarte d'abord ceux qui sont, ou bien impossibles, ou bien indéterminés. Soit u l'élément inconnu, en notant **U** son gradient. On atteint l'incompatible en tirant du problème de Neumann une autre condition pour « flux **U** » [1]: s'annuler à travers toute portion frontière φ, du domaine liquide D. Quant à l'indétermination, elle a lieu, soit que pour $|\mathbf{U}|$ donné on obtienne une classe infinie d'éléments u, soit que **U** s'annulle en divers points de D. Et j'ajoute: on explore ici-même un secteur où l'on rapproche utilement le groupement trouvé par Zaremba-Nikodynn, quand le groupement de Dirichlet et son corrélatif – sens Chasles – le groupement de Neumann furent unis par le premier (Rome 1907). Ce type de jeu prévalait déjà. Enfin, revenant à Π, on notera que le premier mode indéterminé vient de fonctions harmoniques $h = uv$, qui donnent pour D telle famille de lignes et surfaces orthogonales: on écarte donc cette anomalie en prenant pour D un domaine à frontière quelconque.

Venons-en aux cas normaux. Les points, les arcs donnant $\mathbf{U} = 0$, sont portés « par la *hessienne* » de u. Or u pourrait être irrégulière sur un ensemble « points et arcs (analytiques ou non) ». En définitive, on a donc la résolvante de Π par une suite monotone de moyennes itérées, tendant vers $\log r$, ce qui en rend le calcul immédiat et relève, par « moyennes généralisées » d'une méthode créée par H. Lebesgue en 1912 pour les potentiels harmoniques.

Pour une force **F** arbitraire supplantant **U**, le signe de la pression est aléatoire, d'où surfaces de rupture et cavitations éventuelles. Tant que **F** ne dépend pas du temps, on établit (même en géométrie d'une $V^{(n)}$), que le mouvement produit est alors *permanent*, sauf quand **F** contient t (sillages, jets); même exception en cas de *viscosité*.

(1) En outre, s'y joint une autre dès que D est un homéomorphe d'un volume limité par deux sphères concentriques.

Soulignons encore un point important: au lieu de suivre Lebesgue, on peut recourir aux méthodes du type Hadamard. On y change D en un domaine infiniment voisin. Ce qui mène au thème de la dérivée oblique (2).

Revenons au cas du permanent, cela dans un canal en demi–tore d'axe vertical ou d'un autre, déduit du précédent par déformation. On retrouve Π, thème de pure géométrie, ce qui mérite intêret [3]. (Hommage à Lucien Godeaux, Bruxelles, 1968).

Enfin relativement à Π, l'isomorphisme est ici prodigué: il donne accès à l'hydrodynamique, à l'èlasticité, tout comme à la thermostatique, la thermodynamique, aux diélectriques, à l'électro–magnétisme, l'hydromagnétisme pour des énergies moyennes, voire élevées, entre autres, dans les explosions stellaires.

Ainsi, la structure du plan de recherche, commune à ces divers problèmes guide pas à pas le néophyte.

SECTION III. – SUR UN THÈME DE NATURE HYPERBOLIQUE.

Un exemple suffira pour juger de l'importance qui reste acquise aux méthodes précédentes. Il va s'agir de comparer, aux fins d'une métrique d'Univers, celles de Riemann, introduites par Einstein, avec une conique pour indicatrice et dans le sillage du calcul des variations – maxima et minima d'intégrales – celle de Finsler, l'indicatrice étant un contour convexe, muni d'un centre.

Moyennant la méthode relativiste – cas de symétrie sphérique – Schwarzschild a rejoint, outre l'avance séculaire du périhélie de Mercure (environ 40 sec. d'arc sur l'orbite afférente), l'infime incurvation des rayons lumineux qui rasent de très près une grosse masse, telle notre Soleil S, effet qui, lors d'une éclipse, rend visible une étoile, cachée par le disque de S en temps normal. Or, autour de S, le ds^2 de Schwarzschild est souvent affecté par de violentes explosions nucléaires advenant dans la région centrale. D'où une « métrique aléatoire », de type variationnel, par obligation d'intégrer $|ds|$ relativement au temps (3).

Il convient ici de faire deux genres de remarques:

(R_1) On atteint un résolvant linéaire (R_1) du problème Einstein–Schwarzschild dès qu'on le traduit en « ondes gravitationnelles »; en répétant le passage de Π (Sect. 1) à son (R_1), ce qui met en œuvre une « dérivée oblique ». Ces deux exemples émanent directement de la cinématique eulé-

(2) Act. Hermann, n° 219, 1935. Bouligand, Giraud, Delens.

(3) J'y fus conduit en 1958 par des questions de pure géométrie, faisant correspondre (1, 1) une surface Σ lieu d'un point et une congruence de courbes, soit K. On est conduit, dans le premier cas, à une métrique de Riemann, avec indicatrice $Eu^2 + 2Fuv + Gv^2 = 1$, dans le second, à remplacer l'élément d'arc de la précédente par une bandelette, infiniment étroite, dont l'élément d'aire est $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, où l'intégration annonce l'effet déjà rencontré ci–dessus. Voir la bibliographie terminale (ici–nûme).

rienne (milieux déformables) et en éclairent le rôle dans l'économie des « groupements ».

(R_2) Faible par rapport à celles de Neptune et de Pluton, notre distance au Soleil ne permet pas de déceler un écart entre les deux métriques ci–dessus. Tenter de faire intervenir N bombes nucléaires groupées, lesquelles exploreraient en percutant une des dites planètes, est une entreprise des plus risquées, et de même a fortiori, sûre d'échouer en visant une étoile, qui même proche, serait à des milliards d'années: ce qui d'emblée condamne pareil recours.

Sur le plan mathématique, cette impossibilité de fait se traduit en adaptant à un espace de Finsler (et non plus, de Riemann) l'équation des ondes lumineuses

$$c^2 \operatorname{div} (\mathbf{grad}\, u) = u_{tt},$$

réductible à la forme suivante, adaptée, à la métrique et au référentiel –:

$$4\pi c^2 u(\mathrm{P}, t) + \int \iint_{\Omega} u(\mathrm{M}, t)\, \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{M}} = 0;$$

cela, en admettant que Ω et G dépendent du temps. On habilite ainsi la méthode précédente, au profit d'applications relativistes.

Conclusion.

Le rapprochement des thèmes (I, II) qui diffèrent à souhait, témoigne de l'universalité du schème dual. Il ne peut manquer d'inspirer confiance au débutant.

Bibliographie.

[1] Celebrazioni Archimedee, 1964; *Didattica*, pp. 31–39; *Topologia*, pp. 11–20.

[2] Ibid.: *Topologia*.

[3] C.R. Paris 27 nov. 1967.

[4] Ibid.: 3 janvier 1968.

[5] Avec G. Choquet – C.R. As. Sc. Paris, t. 218, 1944, p. 690. Voir en outre M. Coz: *Sur les métriques variationnelles régulières* – thèse, Paris 1938, publiée en 1961 aux Mèmoires de l'Académie Royale de Belgique (références terminales).