Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Leonida Eugenio Krivoscein, Kerim Barat Barataliev, Tahir Amankulov

Approssimazione delle soluzioni di certi sistemi integro—differenziali con argomento ritardato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.3, p. 317–322.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_3_317_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica. — *Approssimazione delle soluzioni di certi sistemi integro-differenziali con argomento ritardato.* Nota di DEMETRIO MANGERON, LEONIDA EUGENIO KRIVOSCEIN, KERIM BARAT BARATALIEV e TAHIR AMANKULOV, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Various matricial ordinary integro-differential equations with delayed arguments of the form (1), (2) are considered and solutions are established by using in every partial interval of existence and uniqueness some special approximate vectorial equation systems.

1. I tentativi fruttuosi recenti di una formulazione sistematica della Meccanica razionale in certe schematizzazioni matematiche cristallizzate in sistemi differenziali ad argomento ritardato, come pure la presentazione recentissima, pure sotto la forma di sistemi ad argomento ritardato, di tutta la problematica spettante ad una nuova scienza chiamata la *Teoria dei giochi differenziali*, iniziatasi coi lavori fondamentali di R. Isaacs [1] e L. S. Pontriaghin [2], hanno sottolineato la vastissima portata degli studi concernenti vari problemi ad argomento ritardato. Tali studi si sono sviluppati in varie direzioni grazie soprattutto ai lavori di C. Corduneanu [3], L. E. El'sgoltz [4], A. Halanay [5], L. E. Krivoscein [6], D. Mangeron [7], A. D. Myškis [8], S. B. Norkin [9], M. N. Oğuztöreli [10], E. Pinni [11], S. N. Simanov [12], R. Bellman [13], R. Conti [14] ed altri ancora.

In ciò che segue si enunciano alcuni risultati concernenti lo studio del problema al contorno di qui sotto concernente un sistema di equazioni integro-differenziali lineari con coefficienti variabili ed argomenti ritardati, rimandando il lettore per vari sviluppi algoritmici ed altri dettagli a due Note da pubblicarsi nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași*.

2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni integro-differenziali con coefficienti variabili ed argomenti ritardati, con varie applicazioni nei problemi di controllo, come si può vedere dallo studio di un recentissimo libro di M. N. Oğuztöreli [15]:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{p} A_j(t)\, x(\alpha_j(t)) = f(t) + \lambda \int_a^t \sum_{j=0}^{p} B_j(t, s)\, x(\alpha_j(s))\, ds, \tag{1}$$

$$Rx = Mx(a) + Nx(b) = \gamma, \tag{2}$$

ove, per $t < a$,

$$x(t) = \varphi(t)\, x(a), \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 9 marzo 1968.

essendovi M ed N matrici quadratiche note costanti, il vettore noto γ è supposto pur esso costante, $\varphi(t)$ è una matrice continua diagonale supposta data su un insieme iniziale

$$E_a = \bigcup_{j=0}^{p} E_{a_j}\{\alpha_j(t) \leq t\,;\, \alpha_j(t) \leq a\,;\, t \in [a\,,b]\} \tag{4}$$

e tale che $\varphi(a) = I$, ove I è come al solito la matrice unitaria. Si ammette tutt'ora che le funzioni scalari di ritardo $\alpha_j(t) \leq t$ $(j = 0, 1, \cdots, p)$ sono pur esse continue, il vettore f a n dimensioni, è definito su $[a\,,b]$, mentre le funzioni matriciali $A_j(t)$, $B_j(t\,,s)$ sono definite nel dominio $G = \{a \leq t \leq \leq b\,;\, a \leq s \leq t \leq b\}$. λ è un parametro, definito in un campo numerico privo di autovalori del problema omogeneo al contorno (1) — (3) $(f = 0\,;\, \gamma = 0)$.

Ammettendo la validità del teorema di esistenza e di unicità per il sistema (1), (2), il quale peraltro è stato già dimostrato dal terzo degli AA. [16], ci occuperemo in ciò che segue della costruzione con approssimazione della soluzione di tale sistema. Sia, per $t \in [a\,,b]$

$$t - \alpha_j(t) \leq \Delta \; (j = 0, 1, \cdots, p\,;\, \Delta > 0\,;\, \alpha_0(t) \equiv t). \tag{5}$$

Suddividendo l'intervallo $[a\,,b]$ in m parti tramite una successione $a = t_0 < < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m = b$ tale che sia

$$\max_{1 \leq r \leq m} |t_r - t_{r-1}| < 0\,, \tag{6}$$

consideriamo nel primo intervallo $[a\,,t_1]$ il seguente sistema vettoriale approssimante di equazioni

$$\frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}\,u_1(t) + \sum_{j=1}^{p} A_j(t)\,u_1(\alpha_j(t)) = f(t) + \tag{7}$$
$$+ \lambda \int_a^t B_0(t\,,s)\,u_1(s)\,ds + \lambda \int_a^t \sum_{j=1}^{p} B_j(t\,,s)\,u_1(\alpha_j(s))\,ds\,,$$

ove si è posto, tenendovi presenti le condizioni (2), (3),

$$A_{01} = (t_1 - a)^{-1} \int_a^{t_1} A_0(t)\,dt.$$

In virtù delle (3) e (6) l'equazione (7) può essere trascritta per $t \in [a\,,t_1]$ sotto la forma

$$\frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}\,u_1(t) = f_1(t\,,\lambda\,,u_1(a)) + \lambda \int_a^t B_0(t\,,s)\,u_1(s)\,ds\,, \tag{8}$$

ove si è posto

$$f_1(t\,,\lambda\,,u_1(a)) \equiv f(t) - u_1(a) \sum_{j=1}^{p} \left[A_j(t)\,\varphi(a_j(t)) - \lambda \int_a^t B_j(t\,,s)\,\varphi(\alpha_j(s))\,ds\right]. \tag{9}$$

Dalla equazione (8) se ne deduce

$$u_1(t) = Z_1(t)\,C_1 + K(t, \lambda, u_1(a)) + \lambda \int_a^t K_1(t, s)\, u_1(s)\, ds, \tag{10}$$

essendo $Z_1(t)$ la matrice fondamentale delle soluzioni dell'equazione

$$\frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}\, u_1(t) = 0\,;$$

$$H_1(t, s) = Z_1(t)\, Z_1^{-1}(s)\,;\ K(t, \lambda, u_1(a)) = \int_a^t H_1(t, s) f_1(s, \lambda, u_1(a))\, ds\,;$$

$$K_1(t, s) = \int_s^t H_1(t, \xi)\, B_0(\xi, s)\, d\xi,$$

ove il vettore C_1 a n dimensioni rimane per ora costante sconosciuto.

Trascriviamo la soluzione dell'equazione integrale (10) sotto la forma

$$u_1(t) = \rho(t, \lambda) + \sigma(t, \lambda)\, C_1, \tag{11}$$

ove $\rho(t, \lambda)$ e $\sigma(t, \lambda)$ sono funzioni note.

Passiamo a considerare adesso il processo di analisi costruttiva escogitato nell'intervallo immediatamente susseguente al precedente, e cioè $t_1 \leq t \leq t_2$. Prendendo invece di $A_0(t)$ su $[t_1, t_2]$

$$A_{02} = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} A_0(t)\, dt$$

e prolungando il dominio iniziale (4) su $[t_1, t_2]$:

$$E_{t_1} = E_a \cup [a, t_1], \tag{12}$$

ponendo cioè

$$u_2(t) = u_1(t), \ t \in E_{t_1}, \tag{13}$$

si ottiene per la $u_2(t)$ la seguente equazione vettoriale

$$\begin{aligned} \frac{du_2(t)}{dt} + A_{02}\, u_2(t) + \sum_{j=1}^{p} A_j(t)\, u_2(\alpha_j(t)) = f(t) \, + \\ + \lambda \int_a^{t_1} \left[B_0(t, s)\, u_1(s) + C_1 \sum_{j=1}^{p} B_j(t, s)\, \varphi(\alpha_j(s)) \right] ds \, + \\ + \lambda \int_{t_1}^{t} \left[B_0(t, s)\, u_2(s) + \sum_{j=1}^{p} B_j(t, s)\, u_2(\alpha_j(s)) \right] ds. \end{aligned} \tag{14}$$

Tenendovi conto delle condizioni (5) e (11), l'equazione (14) diventa

$$(15)\qquad \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + A_{02}\, u_2(t) = f_2(t\,,\lambda\,,C_1) + \lambda \int_{t_1}^{t} B_0(t\,,s)\, u_2(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

ove si è posto

$$(16)\qquad f_2(t,\lambda\,,C_2) \equiv f(t) + \lambda \int_a^{t_1} \left[B_0(t\,,s)\, u_1(s) + C_1 \sum_{j=1}^{p} B_j(t\,,s)\, \varphi(\alpha_j(s)) \right] \mathrm{d}s \,-$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \left[A_j(t)\, u_1(\alpha_j(t)) - \lambda \int_{t_1}^{t} B_j(t\,,s)\, u_1(\alpha_j(s))\,\mathrm{d}s \right] \cdot$$

Dalla (15) si ha

$$(17)\quad u_2(t) = Z_2(t)\, C_2 + \int_{t_1}^{t} Z_2(t)\, Z_2^{-1}(s) \left[f_2(s\,,\lambda\,,C_1) + \lambda \int_{t_1}^{s} B_0(s\,,\xi)\, u_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}s,$$

essendo $Z_2(t)$ la matrice fondamentale delle soluzioni dell'equazione

$$\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + A_{02}\, u_2(t) = 0,$$

mentre C_2 è un vettore costante tuttora sconosciuto.

Trascrivendo la soluzione dell'equazione integrale (17) sotto la forma

$$(18)\qquad u_2(t) = \rho_1(t\,,\lambda) + \sigma_1(t\,,\lambda)\, C_1 + \omega(t\,,\lambda)\, C_2\,,$$

ove $\rho_1\,,\sigma_1\,,\omega$ sono funzioni matriciali vettoriali note, si ottiene dalla (18), tenendo conto della condizione $u_1(t_1) = u_2(t_1)$ e dalla relazione (11),

$$\rho(t_1\,,\lambda) + \sigma(t_1\,,\lambda)\, C_1 = \rho_1(t_1\,,\lambda) + \sigma_1(t_1\,,\lambda)\, C_1 + \omega(t_1\,,\lambda)\, C_2\,.$$

In fine, nell'ipotesi che la matrice $\omega(t_1\,,\lambda)$ è propria, l'espressione del vettore sconosciuto C_2 si ottiene sotto la forma

$$C_2 = \rho_2(\lambda) + \sigma_2(\lambda)\, C_1\,,$$

e dalla (18) si ricava per conseguenza

$$(19)\qquad u_2(t) = \rho_3(t\,,\lambda) + \sigma_3(t\,,\lambda)\, C_1\,.$$

Continuando il procedimento escogitato, si ottiene per la $u_m(t)$:

$$(20)\qquad u_m(t) = \rho_m(t\,,\lambda) + \sigma_m(t\,,\lambda)\, C_1 \quad,\quad t_{m-1} \le t \le b.$$

Facendo ora intervenire le condizioni al contorno (2)

$$Ru \equiv Mu_1(a) + Nu_m(b) = M\,[\rho(a\,,\lambda) + \sigma(a\,,\lambda)\, C_1] \,+$$

$$+\, N\,[\rho_m(b\,,\lambda) + \sigma_m(b\,,\lambda)\, C_1] = \gamma,$$

e supponendo l'esistenza della matrice $[M\sigma(a,\lambda) + N\sigma_m(b,\lambda)]^{-1}$ si ricava pure l'unico vettore C_1 rimasto sin'ora sconosciuto

$$C_1 = [M\sigma(a,\lambda) + N\sigma_m(b,\lambda)]^{-1}[\sigma - M\rho(a,\lambda) - N\rho_m(b,\lambda)]^{-1} \equiv h(\lambda),$$

e, per conseguenza, la soluzione approssimativa del problema considerato (1) — (3) si presenta, sostituendovi nelle $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_m(t)$ il vettore $C \equiv h(\lambda)$, sotto la forma:

$$U(t) = \begin{cases} \varphi(t)\,h(\lambda), & t \in E_a, \\ u_1(t), & a \leq t \leq t_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m(t), & t_{n-1} \leq t \leq b. \end{cases} \tag{21}$$

3. In una nostra Nota susseguente procederemo–ispirandoci dall'ormai classica Tesi di Abilitazione del nostro geniale Maestro M. Picone [17] – allo studio dell'esistenza, unicità e determinazione approssimativa delle soluzioni del problema (1) coadiuvato con varie altre condizioni al contorno, per passare poi all'esposizione, alquanto simile a quella eseguita da noi nei nostri lavori [18]–[19], dei vari modi di valutazione dell'errore commesso

$$w(t) = u(t) - x(t).$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. ISAACS, *Differential games*, « John Wiley ans Sons, Inc. », New York, London, Sydney 1965.

[2] L. S. PONTRIAGHIN, *K teorii differentzial'nyh igr* (*Sopra la teoria dei giochi differenziali*), « Uspehi Mat. Nauk », *21*, 4 (130), 219–274 (1966).

[3] C. CORDUNEANU, *Théorèmes d'existence globale pour les systèmes différentiels à argument retardé*, « Proc. Interna. t. Sympos. Non–linear Vibrations », *2*, 195–201 (1961): İzdat. Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Kiev 1963.

[4] L. E. EL'SGOLTZ, *Vvedenie v teoriju differentzial'nyh uravnenii s otkloniaiuscimsia argumentom* (*Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali con argomento ritardato*). Izdat. « Nauka », M. 1964.

[5] A. HALANAY, *Teoria ustoitchivosti lineinyh perioditcheskih sistem s zapazdyvaniem* (*Teoria della stabilità dei sistemi lineari periodici con argomento ritardato*), « Revue Math. pures et appl., Acad. R. P. R. », *6*, *4*, 633–653 (1961).

[6] L. E. KRIVOSCEIN, *Rešenie smešannoi zadatchi dlia integro–differentzial'nogo uravnenia paraboliceskogo tipa* (*Risoluzione di un problema misto per un'equazione integro–differenziale di tipo parabolico*). Nel volume « Doklady III Sibirskoi Konf. mat., meh. », Tomsk, Gos. Univ., 273–275 (1964).

[7] D. MANGERON, *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati*. Nota I, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », s. VIII, XXXIX, *1–2*, 22–28 (1965).

[8] A. D. MYSKIS, *Obstchaia teoria differentzial'nyh uravnenii s zapazdyvaiustchim argumentom* (*Teoria generale delle equazioni differenziali con argomento ritardato*), « Uspehi Mat. Nauk », *4*, *5*, 99–141 (1949).

[9] S. B. NORKIN, *Differentzial'nye uravnenia vtorogo poreadka s zapazdyvaniem* (*Equazioni differenziali di secondo ordine con argomento ritardato*), İzdat. « Nauka », M. 1965.

[10] M. N. OĞUZTÖRELI, *Time-Lag Control Systems*, « Academic Press », New York and London, *8*, 323 (1966).

[11] E. PINNI, *Equazioni differenziali ordinarie*. Zanichelli, Bologna 1960.

[12] S. N. SIMANOV, *K teorii lineinyh differentzial'nyh uravnenii s perioditcheskimi koeffitzientami i zapazdyvaniem vremeni* (*Teoria delle equazioni differenziali lineari con coefficienti periodici ed argomento ritardato*), « Prikladn. Mat. i Meh. », *27*, *3*, 450–458 (1963).

[13] R. BELLMAN e R. KALABA, *Quasilinearization and nonlinear boundary value problems*, « American Elsevier Publ. Co. », New York, *9*, 206 (1965).

[14] R. CONTI, D. GRAFFI e G. SANSONE, *The Italian contribution to the development of nonlinear ordinary differential equations and non nonlinear Mechanics during the years* 1951–1961, Quaderni de la « Ricerca Scientifica » del Consiglio Nazionale delle Ricerche, I, *3*, 23, Roma 1962.

[15] M. N. OĞUZTÖRELI, *A class of Nonlinear Integro-Differential Equations of Parabolic Type with a Delayed Argument*, « Department of Mathematics, The University of Alberta », Edmonton, Alberta, Canada, Series A: Preprints of Research Papers, *4*, N. 10, 10, Sept. 1967.

[16] K. B. BARATALIEV, *Priblizhennoe resenie nekotoryh zadatch dlia integro-differentzial'nyh uravnenii s zapazdyvaiustchim argumentom* (*Risoluzione approssimativa di alcuni problemi per le equazioni integro-differenziali con argomento ritardato*), « Akad. Nauk Kirg. SSR », Frunze 1965.

[17] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, prima ediz. 1940, seconda ediz. 1946.

[18] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *New Methods of Numerical Calculation for the solutions of various integro-differential systems. I.* « Revue Roumaine des Sci. Techn. Série de Méc. Appl. », *9*, *6*, 1195–1222 (1964).

[19] D. MANGERON, *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni parabolici*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª », *36* (4), 451–456 (1964).