Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Herbert Deresiewicz

Sul moto di particelle nella teoria delle onde di Rayleigh

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 227–231.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_227_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Geofisica. — *Sul moto di particelle nella teoria delle onde di Rayleigh* (*). Nota di HERBERT DERESIEWICZ, presentata (**) dal Socio P. CALOI.

SUMMARY. — A recent result due to Caloi, giving an explicit expression for the ratio of the principal axes of the elliptical motion, generated by a Rayleigh wave, of a particle located on the surface of an elastic half-space, is extended herein to yield a similar formula valid for any point in the solid. A further expression is deduced giving the location of strata on which the motion is purely normal to the bounding plane. Finally, formulas are presented which furnish the maximum value of the displacement normal, and the minimum value of that parallel, to the surface, and their respective location in the medium measured in units of the wave length. Results of numerical computation are given.

In una recente Nota riguardante le onde di Rayleigh, Caloi [1] ha dato una formula semplice per il valore del rapporto dell'ampiezza della componente orizzontale a quella della componente verticale dello spostamento alla superficie del semispazio. In modo simile siamo riusciti ad esprimere esplicitamente il rapporto dell'ampiezza delle due componenti dello spostamento, cioè, il rapporto degli assi principali del moto ellittico delle particelle, dovunque, in funzione della distanza dalla superficie. D'altronde, diamo l'espressione per la profondità dello strato (in unità della lunghezza d'onda) ove il movimento orizzontale si annulla, cioè, ove lo spostamento delle particelle del mezzo è diretto normalmente alla superficie. Infine, presentiamo formule per il valore massimo dello spostamento nella direzione normale, ed il valore minimo di quello diretto parallelamente alla superficie, e la loro posizione, cioè, la profondità nel mezzo, alla quale appaiono i valori stazionari.

Impiegando la notazione di Caloi, ricordiamo i risultati principali dalla teoria di Rayleigh. Le componenti dello spostamento, parallela e normale al piano superficiale, sono

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u = \mathrm{A}\,(fe^{-\gamma z} + \mathrm{E}\,\varepsilon e^{-\varepsilon z}) \sin(pt - fx), \\ w = -\mathrm{A}\,(\gamma e^{-\gamma z} + \mathrm{E} f e^{-\varepsilon z}) \cos(pt - fx), \end{cases}$$

dove p e f sono, rispettivamente, la pulsazione e la reciproca lunghezza d'onda ($f = 2\,\pi/\Lambda$); cioè, $p/f = v_3$, la velocità di propagazione delle onde di Rayleigh, determinata dall'equazione

$$\text{(2)} \qquad (1 - v_3^2/2\,v_2^2)^2 = [(1 - v_3^2/v_1^2)\,(1 - v_3^2/v_2^2)]^{1/2},$$

(*) Lavoro eseguito nella Columbia University a New York con contributi della National Science Foundation sotto l'assegnazione NSF–GP–2722.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

le v_1 e v_2 essendo, rispettivamente, la velocità delle onde di dilatazione e di distorsione in un mezzo indefinito. Definiamo le quantità

$$\chi = v_3^2/v_2^2 \quad , \quad m = v_2^2/v_1^2 = (1 - 2\,\sigma)/2\,(1 - \sigma), \tag{3}$$

dove σ significa il rapporto di Poisson. In séguito alle (3), la (2) si può porre sotto la forma

$$(1 - \chi/2)^2 = [(1 - m\chi)\,(1 - \chi)^{1/2}, \tag{4}$$

oppure, più comodamente,

$$\chi^3 - 8\,\chi^2 + 8\,\chi\,(2 - \sigma)/(1 - \sigma) - 8/(1 - \sigma) = 0, \tag{4'}$$

la radice ammissibile essendo quella reale e minore d'unità.

Ora, ritorniamo alla notazione nella (1): la A è un'ampiezza arbitraria; i coefficienti di estinzione verso l'interno del mezzo, γ e ε, e l'ampiezza E si possono esprimere, in conseguenza alle equazioni del moto, le condizioni alla superficie e le (3), nel modo seguente:

$$\begin{cases} \gamma/f = (1 - m\chi)^{1/2} \quad , \quad \varepsilon/f = (1 - \chi)^{1/2}, \\ \mathrm{E} = -(1 - \chi/2)\,(f/\varepsilon). \end{cases} \tag{5}$$

Tenendo conto delle (4) e (5), si calcola subito dalle (1) il rapporto delle ampiezze delle componenti dello spostamento:

$$\begin{aligned} \frac{u}{w} &= -\frac{1}{\mathrm{E}} \cdot \frac{e^{-\gamma z} + (\mathrm{E}\varepsilon/f)\, e^{-\varepsilon z}}{e^{-\varepsilon z} + (\gamma/\mathrm{E}f)\, e^{-\gamma z}} \\ &= \left(\frac{u}{w}\right)_0 \cdot \frac{e^{-\alpha z/\Lambda} - (1 - \chi/2)\, e^{-\beta z/\Lambda}}{e^{-\beta z/\Lambda} - (1 - \chi/2)\, e^{-\alpha z/\Lambda}} \end{aligned} \tag{6}$$

dove

$$\begin{cases} \alpha = 2\,\pi\,(1 - m\chi)^{1/2}\,, \\ \beta = 2\,\pi\,(1 - \chi)^{1/2}, \end{cases} \tag{7}$$

e

$$\left(\frac{u}{w}\right)_0 \equiv \left(\frac{u}{w}\right)_{z=0} \equiv \frac{u_0}{w_0} = \frac{(1 - \chi)^{1/2}}{1 - \chi/2} = \frac{1 - \chi/2}{(1 - m\chi)^{1/2}} \tag{8}$$

è il rapporto, già dato dal Caloi, ai punti superficiali.

Gli strati interni sui quali il movimento è puramente normale alla superficie sono ottenuti dall'annullarsi del numeratore della (6), cioè,

$$\left(\frac{z}{\Lambda}\right)_{u=0} = \frac{1}{\alpha - \beta} \log_e (1 - \chi/2)^{-1}. \tag{9}$$

Siccome $v_1 > v_2$, $\alpha > \beta$; inoltre, l'argomento nel logaritmo sempre supera l'unità. Allora, la (9) ci rende un valore positivo. D'altro canto, il denominatore della (6) s'annulla per punti la cui distanza dalla superficie è

$$\left(\frac{z}{\Lambda}\right)_{w=0} = \frac{1}{\alpha - \beta} \log_e (1 - \chi/2), \tag{10}$$

rendendo sempre un valore negativo, cioè, non si annulla lo spostamento verticale in nessun piano (a distanza finita).

Dalle (1) si calcola agevolmente i valori estremi delle componenti dello spostamento. Il massimo del $w(z)$ si verifica sugli strati

$$\left(\frac{z}{\Lambda}\right)_{w'=0} = \frac{1}{\alpha - \beta} \log_e \frac{1 - m\chi}{1 - \chi/2} \tag{11}$$

e il suo valore è

$$\frac{w_M}{w_0} = \frac{\chi/2}{(1-\chi/2)^2} \left(\frac{1-\chi/2}{1-m\chi}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} ; \tag{12}$$

invece il minimo del $u(z)$ occorre sugli strati

$$\left(\frac{z}{\Lambda}\right)_{u'=0} = \frac{1}{\alpha - \beta} \log_e \frac{1 - \chi/2}{1 - \chi} , \tag{13}$$

il suo valore essendo

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{-\chi/2}{1-\chi/2} \left(\frac{1-\chi}{1-\chi/2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} . \tag{14}$$

Per dare un'idea della variazione delle suddette quantità in funzione dell'elasticità del mezzo, presentiamo i risultati del calcolo numerico per alcuni valori di σ nella Tabella e nella fig. 1.

TABELLA.

σ	1/2	1/3	.29	1/4	1/10	0
χ	.9126	.8696	.8571	.8453	.7976	.7639
v_3/v_2	.9553	.9325	.9258	.9194	.8931	.8740
v_2/v_1	0	.5	.5438	.5774	.6667	.7071
α	6.2832	5.5581	5.4287	5.3250	5.0479	4.9392
β	1.8573	2.2689	2.3744	2.4712	2.8268	3.0530
u_0/w_0	.5437	.6389	.6613	.6812	.7483	.7862
$(z/\Lambda)_{u=0}$ . . .	.1377	.1735	.1832	.1925	.2291	.2551
$(z/\Lambda)_{u'=0}$ . . .	.4130	.4459	.4540	.4615	.4902	.5102
$(z/\Lambda)_{w'=0}$ . . .	.1377	.0989	.0876	.0765	.0328	0
u_m/u_0	—.3897	—.2797	—.2552	—.2307	—.1660	—.1302
w_M/w_0	1.1953	1.0874	1.0664	1.0495	1.0079	1
$(u/w)_\infty$	—.2956	—.3611	—.3779	—.3933	—.4499	—.4859

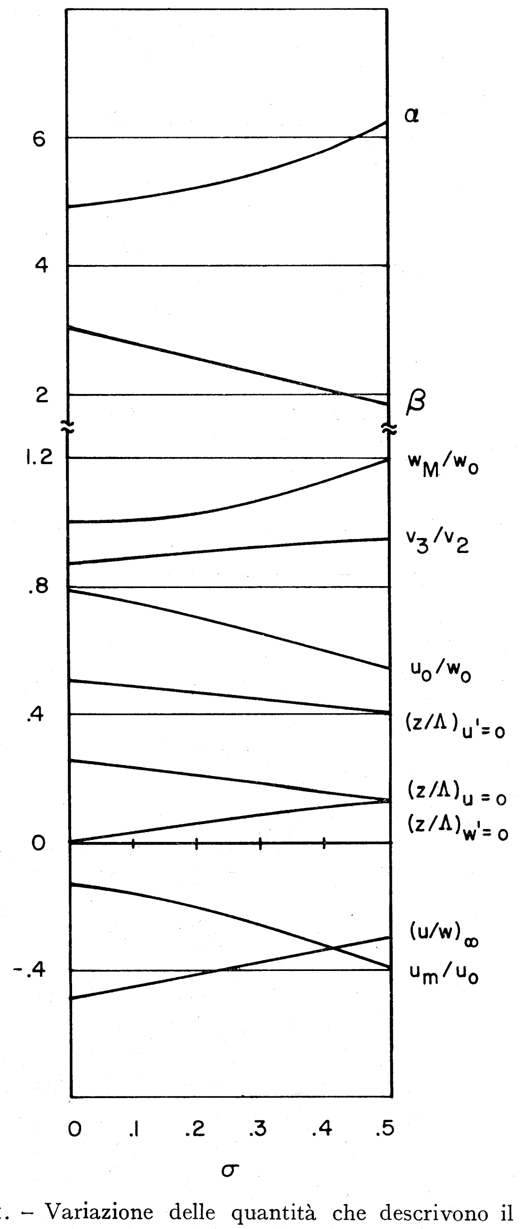

Fig. 1. – Variazione delle quantità che descrivono il moto delle particelle in funzione dell'elasticità del mezzo.

Finalmente, nella fig. 2 presentiamo la variazione, ottenuta dalle (1) e (6), delle componenti del moto delle particelle in funzione della distanza dal piano superficiale. Notiamo parecchi risultati interessanti:

(*a*) Ambo il massimo del rapporto w/w_0 ed il valore assoluto del minimo di u/u_0 aumentano piuttosto fortemente con σ, mentre il valore di u/w alla superficie ed il suo valore assoluto all'infinito diminuiscono.

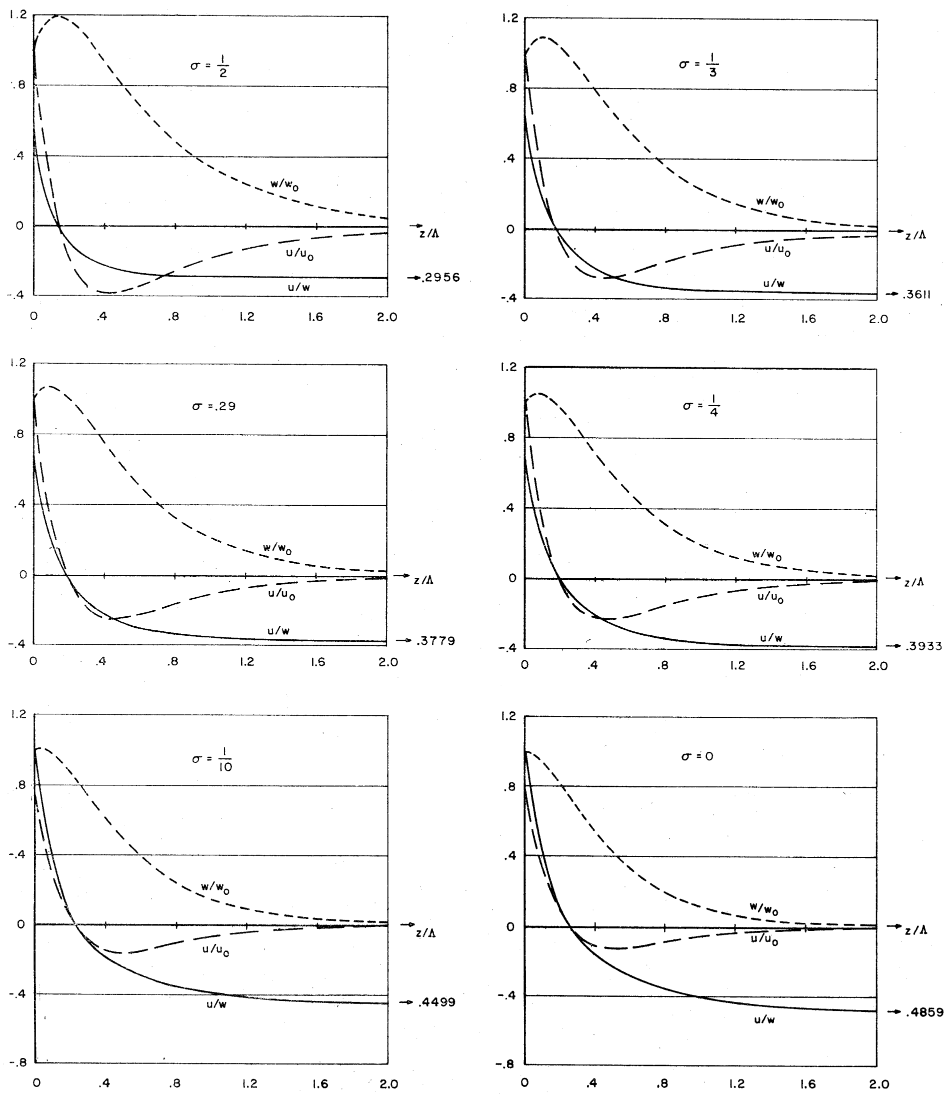

Fig. 2. – Variazione delle componenti dello spostamento e del loro rapporto con distanza dalla superficie.

(*b*) Lo strato sul quale w/w_0 è massimo diventa più profondo con il crescere di σ; invece gli strati dove u/u_0 è minimo e dove u si annulla si avvicinano alla superficie con l'aumento di σ.

BIBLIOGRAFIA.

[1] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana*. – I. *Le onde di Rayleigh*, Accademia Naz. dei Lincei, « Rend. Cl. Sc. fis., mat. e nat. », vol. XLI, 1966, 8–17.