Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Crupi

Sul principio di azione stazionaria e sulle equazioni elettromagnetiche nello spazio—tempo. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 218–226.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_218_0>

Fisica matematica. — *Sul principio di azione stazionaria e sulle equazioni elettromagnetiche nello spazio–tempo.* Nota II [(*)] di GIOVANNI CRUPI, presentata [(**)] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In our "paper I", considering the difference between tensors and pseudotensors, the problem of electromagnetic fields in vacuum, which can be deduced from the principle of least action, was discussed. In this "paper II" we have extended our research to the electromagnetic fields in matter and we have deduced field equations, more general than Maxwell's, which are covariant under Lorentz proper and improper trasformations.

6. – In una recente Nota I [(14)], nello schema della distinzione tra tensori e pseudo tensori, è stato riesaminato il problema della deduzione da un unico principio di azione stazionaria di campi elettromagnetici nello spazio–tempo. E più precisamente, sono state dedotte equazioni di campi aventi sede nello spazio vuoto più generali di quelli maxwelliani e dotati della proprietà di covarianza rispetto a trasformazioni proprie ed improprie di Lorentz.

L'oggetto della presente Nota II è quello di continuare la precedente ricerca, estendendola al caso dei campi in presenza della materia.

Per evidenti ragioni di stretta connessione, nel corso del presente lavoro sarà proseguita la numerazione dei paragrafi e delle formule della Nota I.

Nel n. 7 si faranno alcuni richiami sulla descrizione nello spazio–tempo dei campi maxwelliani in presenza della materia, e ciò allo scopo di avere un modello fisico per le successive generalizzazioni.

Nel n. 8 sarà richiamato un lemma di Finzi del 1960 sulla decomposizione di un generico tensore emisimmetrico nello spazio–tempo e si coglierà l'occasione, sulla scorta di considerazioni esposte in un precedente lavoro [(3)], di precisare la natura tensoriale o pseudo tensoriale degli enti che in esso figurano.

Nel n. 9 sarà introdotta un'azione integrale che estende al caso della materia l'azione (23), associata ai campi generali nel vuoto.

Nel n. 10, ponendo a base l'azione proposta nel n. 9, saranno dedotte da un unico principio di azione stazionaria equazioni differenziali di campi più generali di quelli di Maxwell nella materia e, successivamente, sarà sottolineato il loro carattere covariante per qualunque trasformazione propria ed impropria.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

(14) « Rend. Ist. Lomb. Sc. », A 101, 473–490 (1967).

7. – Per la trascrizione quadridimensionale nello spazio–tempo dei campi elettromagnetici maxwelliani, aventi sede nei corpi, si introducono due tensori doppi emisimmetrici, e vengono generalmente indicati con $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$, ed un quadrivettore distribuzione elettrica J^{α} $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$.

Il tensore $F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha}$ riassume nella traduzione quadridimensionale i vettori tridimensionali E e B, i quali esprimono, rispettivamente, l'intensità del campo elettrico e l'induzione magnetica; il tensore $f_{\alpha\beta} = - f_{\beta\alpha}$ riassume nello spazio–tempo i due vettori H e D che nell'ordinaria elettrodinamica tridimensionale denotano, rispettivamente, l'intensità magnetica e l'induzione elettrica; il quadrivettore J^{α} riassume la densità elettrica e la corrente specifica.

Se il processo elettromagnetico in atto nella materia è riferito ad un sistema inerziale, in cui sono state introdotte coordinate galileiane, allora la metrica dello spazio–tempo si presenta nella seguente forma pseudo euclidea:

$$ds^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2})$$

e le componenti covarianti dei due tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$ sono legate alle componenti cartesiane dei vettori tridimensionali E, B, H, D dalle formule:

$$(63) \qquad \begin{cases} F_{i0} = E_i & F_{i+1\, i+2} = B_i & F_{\alpha\alpha} = 0 \\ f_{i0} = D_i & f_{i+1\, i+2} = H_i & f_{\alpha\alpha} = 0, \end{cases}$$

mentre per le componenti controvarianti vale il seguente quadro:

$$(64) \qquad \begin{cases} F^{i0} = - E_i & F^{i+1\, i+2} = B_i & F^{\alpha\alpha} = 0 \\ f^{i0} = - D_i & f^{i+1\, i+2} = H_i & f^{\alpha\alpha} = 0 \end{cases}$$

$(\alpha = 0, 1, 2, 3 ; i = 1, 2, 3)$.

L'introduzione dei tensori $F_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$, J^{α} permette di tradurre le equazioni differenziali dei campi maxwelliani in presenza della materia nella seguente forma spazio–temporale (15)

$$(65) \qquad \begin{cases} (65)_1 & E^{\delta\gamma\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta/\gamma} = 0 \\ (65)_2 & f^{/\beta}_{\alpha\beta} = J_{\alpha} \end{cases}$$

dove lo pseudotensore $E^{\delta\gamma\alpha\beta}$ è quello definito da (3).

È pure noto che i due tensori doppi emisimmetrici $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$, associati ad un medesimo campo elettromagnetico, non sono indipendenti ed, anzi, sono legati, in un dato mezzo, da relazioni finite. Più precisamente, i due tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$ coincidono nel vuoto, mentre nei corpi sono legati da una relazione tensoriale del tipo (16).

$$(66) \qquad F_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}\, f^{\varrho\sigma}$$

(15) B. FINZI–M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna, pp. 424–425 (1961).

(16) B. FINZI, *Principio d'azione stazionaria nell'elettrodinamica dei fluidi*, « Ann. di Matem. pura ed appl. », (IV), *50*, pp. 319–340.

oppure

$$f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\, F_{\mu\nu}\,. \tag{67}$$

I due tensori quadrupli $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ e $\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$ si riguardano come emisimmetrici sia rispetto alla prima che alla seconda coppia di indici e simmetrici rispetto allo scambio simultaneo del primo col terzo e del secondo col quarto indice, cioè

$$(68)\qquad \begin{cases} (68)_1 & \Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma} = -\,\Gamma_{\beta\alpha\varrho\sigma} = -\,\Gamma_{\alpha\beta\sigma\varrho} = \Gamma_{\varrho\sigma\alpha\beta} \\ (68)_2 & \gamma_{\alpha\beta\mu\nu} = -\,\gamma_{\beta\alpha\mu\nu} = -\,\gamma_{\alpha\beta\nu\mu} = \gamma_{\mu\nu\alpha\beta}\,. \end{cases}$$

Dalle (66) e (67), si trae

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma^{\alpha\beta\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\,(g^{\varrho}_{\mu}\, g^{\sigma}_{\nu} - g^{\varrho}_{\nu}\, g^{\sigma}_{\mu})\,. \tag{69}$$

Nel caso particolare in cui il corpo è isotropo ed in quiete rispetto ad un sistema inerziale, la (66), o la (67), conduce a:

$$(70)\qquad \begin{cases} f_{i0} = \eta F_{i0} \\ f_{ik} = \dfrac{1}{\zeta}\, F_{ik}\,. \end{cases}$$

Le (70) traducono le due equazioni materiali tridimensionali

$$D = \eta E \quad , \quad B = \zeta H \tag{71}$$

dove η e ζ indicano, rispettivamente, il coefficiente dielettrico e la permeabilità magnetica.

8. – In una Nota del 1960 [16], Finzi ha dimostrato che un generico tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ dello spazio–tempo è suscettibile di essere decomposto nel seguente modo:

$$F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + C_{\gamma\delta\alpha\beta}\, E^{\gamma\delta\varrho\sigma}\, \Psi_{\sigma/\varrho} \tag{72}$$

con

$$\Phi^{/\beta}_{\beta} = 0 \tag{73}$$

$$\Psi^{/\beta}_{\beta} = 0 \tag{74}$$

dove $C_{\gamma\delta\alpha\beta}$ è un tensore quadruplo assegnato, indipendente da $F_{\alpha\beta}$ ed emisimmetrico rispetto alla coppia di indici α e β; $E^{\gamma\delta\varrho\sigma}$ indica lo pseudo tensore definito da (3).

Nel caso particolare in cui si ponga

$$C_{\gamma\delta\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\delta})\,, \tag{75}$$

si ottiene con facili calcoli che

$$C_{\gamma\delta\alpha\beta}\, E^{\gamma\delta\varrho\sigma}\, \Psi_{\sigma/\varrho} = E_{\alpha\beta\varrho\sigma}\, \Psi^{\sigma/\varrho}\,. \tag{76}$$

Infine, tenendo presente la (76), la (72) si particolarizza nella:

$$F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + E_{\alpha\beta\varrho\sigma} \Psi^{\sigma/\varrho} . \tag{77}$$

Con la (77) possiamo affermare che il lemma (72), qualora al tensore $C_{\gamma\delta\alpha\beta}$ si attribuisca la struttura (75), si riduce, a meno del nome di qualche indice, al lemma (13) che estende il teorema di Clebsch ai tensori emisimmetrici dello spazio-tempo.

Per ulteriori dettagli riguardanti il lemma (72) si può utilmente consultare il lavoro originale citato (16).

Chiudiamo questo numero inserendo l'osservazione, utile per il seguito, che per gli enti Φ_α e Ψ_α, a secondo membro della (72), valgono ancora le conclusioni cui si è pervenuti nel corso della recente analisi (3) che ha permesso di precisare la natura degli enti che figurano nel secondo membro della (13). E più precisamente, nello schema della distinzione tra tensori e pseudo tensori, Φ_α va interpretato come tensore di rango uno, mentre Ψ_α va riguardato, in base alla sua legge di trasformazione nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro, come uno pseudo tensore.

9. – Ci proponiamo, adesso, di introdurre l'azione da associare ad un generico campo elettromagnetico, anche non maxwelliano, avente sede nella materia.

Supponiamo che tali campi nello spazio-tempo si possano descrivere con due tensori emisimmetrici $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$, a priori generici, e la distribuzione elettrica con un quadrivettore J^α.

Nello spazio vuoto i due tensori elettromagnetici coincidono mentre nella materia vanno concepiti diversi tra loro.

Ispirandoci a ciò che è noto nei campi maxwelliani, supporremo nel corso del presente lavoro che i due tensori elettromagnetici associati ai campi generali siano, ancora, legati tra loro da relazioni del tipo (66) e (67), cioè:

$$F_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma} \tag{78}$$

$$f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} . \tag{79}$$

Le (78) e (79) sono formalmente uguali alle (66) e (67), ma differiscono per il significato dei tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$.

Infatti, nelle (66) e (67) tali tensori sono quelli associati ad un campo maxwelliano, mentre nelle (78) e (79) sono associati ad un campo generico anche non maxwelliano.

Applicando al tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$, associato al campo generico, il lemma (72), si può porre:

$$F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \Gamma_{\delta\varepsilon\alpha\beta} E^{\delta\varepsilon\varrho\sigma} \Psi_{\sigma/\varrho} \tag{80}$$

dove il tensore quadruplo $\Gamma_{\delta\varepsilon\alpha\beta}$, che è quello stesso che figura nella (78), gode delle propreità richieste per il tensore $C_{\gamma\delta\alpha\beta}$ a secondo membro della (72).

Successivamente, sostituendo la (80) nella (79), si ha:

$$f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi_{\nu/\mu} - \Phi_{\mu/\nu}) + \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\,\Gamma_{\delta\varepsilon\mu\nu}\,E^{\delta\varepsilon\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho}\,, \tag{81}$$

e questa può essere ricondotta alla forma:

$$f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi_{\nu/\mu} - \Phi_{\mu/\nu}) + E^{\alpha\beta\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho}\,. \tag{82}$$

Infatti, invocando la (69), si trova:

$$\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\,\Gamma_{\delta\varepsilon\mu\nu}\,E^{\delta\varepsilon\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho} = \frac{1}{2}(g^{\alpha}_{\delta}\,g^{\beta}_{\varepsilon} - g^{\alpha}_{\varepsilon}\,g^{\beta}_{\delta})\,E^{\delta\varepsilon\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho} = E^{\alpha\beta\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho}\,.$$

Le formule (80) e (82) ci permettono di riconoscere che, in virtù del lemma di Finzi (72), nella materia i due tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$, associati ad un campo generico, si possono esprimere in termini delle derivate prime tensoriali di *una medesima* coppia di potenziali: Φ_α e Ψ_α.

Se, per brevità, poniamo

$$I_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} \tag{83}$$

$$S^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\varrho\sigma}\,\Psi_{\sigma/\varrho}\,, \tag{84}$$

allora la (80) e la (82) assumono, più concisamente, la forma:

$$F_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + \Gamma_{\delta\varepsilon\alpha\beta}\,S^{\delta\varepsilon} \tag{85}$$

$$f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\,I_{\mu\nu} + S^{\alpha\beta} \tag{86}$$

dove $I_{\alpha\beta}$ è un tensore irrotazionale ed $S^{\alpha\beta}$ un tensore solenoidale.

Possiamo, ora, costruire l'azione integrale da associare al generico campo, anche non maxwelliano, avente sede nella materia.

Gli enti cronotopici connessi ad un campo generale sono:

$$F_{\alpha\beta}\quad,\quad f_{\alpha\beta}\quad,\quad J^{\alpha}\quad,\quad \Phi_\alpha\quad,\quad \Psi_\alpha\,. \tag{87}$$

Fermiamo l'attenzione sulla coppia di tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$ che, insieme, descrivono nello spazio–tempo un generico campo elettromagnetico.

Tali tensori non sono indipendenti e, specificatamente, sono legati dalla (78), dove il tensore quadruplo $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$, com'è noto (16), traduce nella rappresentazione quadridimensionale le proprietà elettriche, magnetiche e cinetiche della materia. Tra l'altro, la (78) mette in rilievo che per la descrizione nello spazio–tempo di un campo che ha sede nella materia è sufficiente conoscere il tensore materiale $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ ed uno dei due tensori di campo, per esempio $f^{\varrho\sigma}$. Infatti, nota la struttura del tensore materiale $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ e quella di $f^{\varrho\sigma}$, per costruire l'altro tensore di campo, cioè $F_{\alpha\beta}$, basta applicare l'operazione di composizione nella forma indicata dalla (78).

Cosicché, i due tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$ *non possono* essere assunti come grandezze di stato tra loro indipendenti.

Osserviamo, ora, che con i due tensori $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ ed $f^{\varrho\sigma}$ si può costruire il solo invariante quadratico scalare

$$(88)_1 \qquad \Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma} f^{\alpha\beta}$$

che partecipi sia delle proprietà della materia e sia delle proprietà del campo.

Tenendo, poi, presente la (78), la $(88)_1$ conduce alla

$$(88)_2 \qquad \Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma} f^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta},$$

cioè l'invariante quadratico scalare a cui, congiuntamente, conducono i due tensori $\Gamma_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ ed $f^{\varrho\sigma}$ coincide con l'unico invariante di campo, nel senso che l'invariante a secondo membro della $(88)_2$ è l'unico che riassume il contributo di entrambi i tensori $F_{\alpha\beta}$ ed $f_{\alpha\beta}$ che, insieme, descrivono il campo.

Alla stessa conclusione espressa dalla $(88)_2$ si perviene anche prendendo le mosse dalla (79).

Inoltre, con il quadrivettore distribuzione elettrica J^α e con i due quadripotenziali Φ_α e Ψ_α, sempre restando aderenti allo schema della distinzione tra tensori e pseudotensori, precisato nella Nota I (14), si possono costruire i seguenti invarianti quadratici scalari:

$$(89)_1 \quad \Phi_\alpha \Phi^\alpha, \qquad (89)_2 \quad J_\alpha \Phi^\alpha, \qquad (89)_3 \quad \Psi_\alpha \Psi^\alpha, \qquad (89)_4 \quad J_\alpha J^\alpha.$$

Ricordiamo, per trarre norma, che con gli scalari $(88)_2$ ed $(89)_2$ si costruisce l'integrale d'azione

$$(90) \qquad S = \int_\Omega \left(\frac{1}{4} f_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J_\alpha \Phi^\alpha \right) d\Omega$$

che permette di dedurre da un unico principio di azione stazionaria (16) entrambe le equazioni maxwelliane dei campi elettromagnetici nella materia.

Effettuando una opportuna generalizzazione della (90), ci accingiamo ora a proporre un'azione integrale da associare ai campi generali con sede nella materia.

Muoviamo dalla considerazione che nella funzione integranda della (90) non figurano gli invarianti quadratici scalari $(89)_1$, $(89)_3$ ed $(89)_4$.

Il contributo di $(89)_4$ è inessenziale in una ricerca, come la presente, di campi a parità di distribuzione elettrica. Però, almeno a priori, non vi è alcuna ragione fisica che suggerisca di trascurare anche i contributi degli invarianti quadratici scalari $(89)_1$ ed $(89)_3$.

Perciò, siamo condotti a proporre il seguente integrale d'azione

$$(91) \qquad S = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{4} f_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J_\alpha \Phi^\alpha - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \mu \Psi_\alpha \Psi^\alpha \right) \right\} d\Omega$$

per i campi generali nella materia. I parametri λ e μ sono due costanti universali nel senso di Finzi (1).

Se nella (91) poniamo $F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}$ (condizione valida nel vuoto), allora la (91) si identifica, a meno del nome di qualche lettera, con la (23), cioè si identifica con l'integrale d'azione introdotto nel corso della Nota I per i campi generali nel vuoto.

10. – In questo numero conclusivo, ci proponiamo di trovare, applicando il metodo variazionale di Finzi, le equazioni differenziali dei campi che si possono dedurre dall'azione integrale (91).

I calcoli, come nella Nota I, saranno eseguiti in coordinate generali, introdotte in un riferimento inerziale.

Indichiamo con δS la variazione che subisce l'azione integrale (91) in un generico dominio quadridimensionale Ω in corrispondenza ad incrementi infinitesimi arbitrari dei potenziali Φ_α e Ψ_α, assunti come variabili di stato indipendenti.

Supponiamo che sul contorno Σ di Ω le variazioni dei potenziali siano nulle, cioè:

$$(\delta\Phi_\alpha)_\Sigma = 0 \quad , \quad (\delta\Psi_\alpha)_\Sigma = 0 . \tag{92}$$

Applicando ad ambo i membri della (91) l'operatore δ e tenendo presenti le (33), (34) e (35), si ottiene:

$$\delta S = \delta\sigma_1 - \int_\Omega \left\{ \left(J_\alpha + \frac{1}{\lambda^2}\, \Phi_\alpha \right) \delta\Phi^\alpha + \frac{\mu}{\lambda^2}\, \Psi_\alpha\, \delta\Psi^\alpha \right\} d\Omega \tag{93}$$

con

$$\delta\sigma_1 = \frac{1}{4} \int_\Omega (f_{\alpha\beta}\, \delta F^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}\, \delta f_{\alpha\beta})\, d\Omega . \tag{94}$$

Poiché da (85) ed (86), tenendo presente che i tensori quadrupli $\Gamma_{\delta\varepsilon\alpha\beta}$ e $\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$ non dipendono dai potenziali Φ_α ed Ψ_α, si deduce

$$\delta F_{\alpha\beta} = \delta I_{\alpha\beta} + \Gamma_{\delta\varepsilon\alpha\beta}\, \delta S^{\delta\varepsilon} \tag{95}$$

$$\delta f^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\, \delta I_{\mu\nu} + \delta S^{\alpha\beta} , \tag{96}$$

allora la (94) può essere ricondotta alla forma:

$$\delta\sigma_1 = \frac{1}{4} \int_\Omega (f_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\alpha\beta})\, \delta I^{\mu\nu}\, d\Omega + \tag{97}$$

$$+ \frac{1}{4} \int_\Omega (F^{\alpha\beta} + \Gamma^{\delta\varepsilon\alpha\beta} f_{\delta\varepsilon})\, \delta S_{\alpha\beta}\, d\Omega ,$$

e questa, in virtù delle equazioni materiali (78) e (79), si muta nella

$$\delta\sigma_1 = \frac{1}{2} \int_\Omega (f_{\mu\nu}\, \delta I^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\, \delta S_{\mu\nu})\, d\Omega . \tag{98}$$

Adesso, invocando le (83) e (84), la (98), con semplici passaggi, può ricondursi a:

$$(99) \qquad \delta\sigma_1 = \int_\Omega (f^{\mu\nu}\,\delta\Phi_\nu)_{/\mu}\,d\Omega - \int_\Omega f^{\mu\nu}_{/\mu}\,\delta\Phi_\nu\,d\Omega + $$
$$+ \int_\Omega (\overset{*}{F}_{\varrho\sigma}\,\delta\Psi^{\varrho\sigma})^{/\varrho}\,d\Omega - \int_\Omega \overset{*}{F}{}^{/\varrho}_{\varrho\sigma}\,\delta\Psi^{\varrho\sigma}\,d\Omega\,,$$

con

$$(100) \qquad \overset{*}{F}_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\,E_{\mu\nu\varrho\sigma}\,F^{\mu\nu}\,.$$

Ma per il teorema della divergenza, applicato nello spazio-tempo nella forma indicata con la (31), si ha:

$$\int_\Omega (f^{\mu\nu}\,\delta\Phi_\nu)_{/\mu}\,d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega (\overset{*}{F}_{\varrho\sigma}\,\delta\Psi^{\varrho\sigma})^{/\varrho}\,d\Omega = 0\,,$$

e quindi la (99) si particolarizza nella

$$(101) \qquad \delta\sigma_1 = -\int_\Omega (f^{\mu\nu}_{/\mu}\,\delta\Phi_\nu + \overset{*}{F}{}^{/\varrho}_{\varrho\sigma}\,\delta\Psi^{\varrho\sigma})\,d\Omega\,.$$

Infine, sostituendo la (101) nella (93) si ottiene

$$(102) \qquad \delta S = \int_\Omega \left\{ \left(f^{\nu\mu}_{/\mu} - J^\nu - \frac{1}{\lambda^2}\,\Phi^\nu\right)\delta\Phi_\nu + \left(\overset{*}{F}{}^{/\varrho}_{\sigma\varrho} - \frac{\mu}{\lambda^2}\,\Psi_\sigma\right)\delta\Psi^{\varrho\sigma} \right\} d\Omega\,,$$

e questa esprime la variazione che subisce l'integrale d'azione (91) nel dominio quadridimensionale Ω in corrispondenza a variazioni infinitesime arbitrarie dei potenziali Φ_α e Ψ_α, subordinatamente alle condizioni (92).

Se si pone

$$(103) \qquad \begin{cases} f^{\nu\mu}_{/\mu} = J^\nu + \dfrac{1}{\lambda^2}\,\Phi^\nu \\[2mm] \overset{*}{F}{}^{/\varrho}_{\sigma\varrho} = \dfrac{\mu}{\lambda^2}\,\Psi_\sigma\,, \end{cases}$$

dalla (102) si ha:

$$(104) \qquad \delta S = 0\,.$$

Viceversa, affinché la (102) sia soddisfatta per una scelta arbitraria in Ω delle variazioni infinitesime dei potenziali, purché soddisfacenti alle (92), devono essere vere le equazioni (102).

Così possiamo concludere che, nello schema della distinzione tra tensori e pseudo tensori, le equazioni (103) sono quelle che estendono al caso della materia le equazioni dei campi elettromagnetici generali (37), stabilite nella Nota I nel caso in cui la sede del campo sia il vuoto.

Osserviamo che, tenendo presente la (100), le equazioni (103) possono essere ricondotte alle

$$
(105) \quad \begin{cases} (105)_1 & f^{\nu\mu}_{/\mu} = J^{\nu} + \frac{1}{\lambda^2}\Phi^{\nu} \\ (105)_2 & \frac{1}{2} E_{\sigma\varrho\delta\nu} F^{\delta\nu/\varrho} = \frac{\mu}{\lambda^2}\Psi_{\sigma}. \end{cases}
$$

La $(105)_1$ è un'equazione del tipo

tensore = tensore

e la $(105)_2$ è del tipo

pseudo tensore = pseudo tensore.

Pertanto, ciascuna delle due equazioni (105) si presenta in forma covariante sia rispetto a trasformazioni proprie e sia rispetto a trasformazioni improprie di Lorentz.

La $(105)_2$, con procedimento che omettiamo perché sostanzialmente è stato già illustrato nella Nota I, può ricondursi ad un'equazione del tipo

tensore = tensore.

Chiudiamo il lavoro fissando l'attenzione sull'aspetto che le (105) assumono in due casi particolari notevoli.

A) Se si pone $F^{\nu\mu} = f^{\nu\mu}$ (condizione valida nel vuoto), allora le (105) si particolarizzano, a meno del nome di qualche lettera, nelle equazioni (37), che governano i campi elettromagnetici generali nel vuoto. Possiamo così constatare che per passare dalle equazioni generali nella materia alle corrispondenti nel vuoto si procede come nel caso dei campi maxwelliani.

B) Le equazioni dei campi elettromagnetici maxwelliani nella materia rientrano come un caso particolare delle (105).

Infatti, per μ finito e $\lambda \rightarrow \infty$, le (105) si riducono alle (65).