Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 191–200.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_191_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Meccanica. — *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale* (*). Nota I di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — It is shown here that the validness of the theorem of Menabrea for an elastic body, with the internal constraint of incompressibility and some boundary conditions, exists even if the body undergoes a thermoelastic transformation from a spontaneous equilibrium state stressed.

1. *Introduzione.* – Scopo della presente Nota è di mostrare che la validità del teorema di Menabrea (1) può essere estesa a un corpo elastico anche incomprimibile (come la gomma), anisotropo e non omogeneo, sottoposto a piccole trasformazioni (2), concomitanti a un fenomeno di propagazione stazionaria di calore, che iniziino da una configurazione di equilibrio spontaneo a temperatura uniforme *non esente da stress*, intrinsecamente stabile (3). Il corpo sarà supposto inoltre con appoggi cedevoli o con spostamento noto su una porzione della sua frontiera. All'energia potenziale elastica specifica s'imporrà soltanto di essere una forma quadratica non degenere, e tale inoltre che la configurazione di riferimento risulti intrinsecamente stabile. Allo stress soluzione del problema elastostatico non si richiederà alcuna proprietà differenziale (4). In una seconda Nota sarà eseguita la inversione del teorema medesimo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 14 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

(1) F. MENABREA, *Etude de Statique Physique. Principe général pour determiner les pressions et les tensions dans un systéme élastique*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino», Serie 2ª, Tomo 25, MDCCCLXXI, pp. 41–81.

Cfr. anche G. KRALL, *Meccanica Tecnica delle vibrazioni*, Zanichelli, Bologna 1940, Parte seconda, p. 22; A. SIGNORINI, *Sulla statica dei sistemi vincolati*, «Atti del VI Congresso dell'U.M.I.» 1959, Cremonese, Roma, pp. 79–93; G. GRIOLI, *Validità del teorema di Menabrea e integrazione del problema dell'Elastostatica in casi non isotermi*, «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova», 1952.

(2) Cfr. A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 4ª, «Annali di Matematica pura ed applicata», (IX), Vol. LI, 1960, p. 353.

(3) Una configurazione C_* è configurazione di equilibrio spontaneo a temperatura uniforme τ quando a tale temperatura le forze *intime*, attive e vincolari, costituiscono un insieme equivalente a zero per ogni porzione di C_*. La medesima configurazione è inoltre intrinsecamente stabile se, a partire da essa, per ogni spostamento non rigido il lavoro complessivo delle forze intime risulta sempre negativo. (Cfr. A. SIGNORINI, *Memoria* cit. in (2), pp. 340 e 348).

(4) Cfr. G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», (VIII), 7, 1964, pp. 91–140.

§ 1. – Questioni preliminari di elastostatica semilinearizzata.

2. – *Richiami di statica termoelastica semilinearizzata per solidi incomprimibili.* – Nella statica delle piccole trasformazioni termoelastiche per solidi incomprimibili, com'è noto, il sistema di equazioni indefinite che ne sono a fondamento[5] si spezza nella equazione di conduzione stazionaria del calore, che permette la determinazione diretta della temperatura $u(P_*)$, e nelle tre equazioni di Kirchhoff. Per tale motivo, in quanto segue, la temperatura si supporrà una funzione nota. Si ammetterà inoltre di potere scegliere come configurazione di riferimento C_* una configurazione di equilibrio spontaneo a temperatura $u \equiv 0$, intrinsecamente stabile; e indicando con Σ_* la frontiera di C_*, con $\mathbf{N}^*$ il versore della normale interna a Σ_*, e k_* la densità del corpo, le equazioni di Kirchhoff potranno scriversi nella forma [6]

$$(1) \qquad \sum_1^3{}_h \frac{\partial \Delta_{ih}}{\partial y_h} = k^* F_i \qquad \text{in } C_*$$

$$(2) \qquad \sum_1^3{}_h \Delta_{ih} N_h^* = \bar{f}_i^* \qquad \text{su } \Sigma_* .$$

In esse $k^* \mathbf{F}$ ed $\bar{\boldsymbol{f}}^*$ sono i rispettivi vettori delle forze di massa e delle forze agenti sulla superficie Σ_*; le Δ_{ih} sono espresse dalle formule

$$(3) \qquad \Delta_{ih} = K_{ih} - \overset{*}{X}_{ih} ,$$

$K_{ih} = \sum_1^3{}_m \frac{\partial x_i}{\partial y_m} Y_{hm}$ essendo le caratteristiche (non simmetriche) dello stress secondo Kirchhoff, x_i le coordinate attuali, y_i le coordinate lagrangiane, Y_{hm} le caratteristiche lagrangiane di tensione; le $\overset{*}{X}_{ih}$ sono le caratteristiche dello stress nella configurazione di riferimento C_*. Non si esclude che il solido elastico sia soggetto al vincolo di incomprimibilità a temperatura costante,

$$(4) \qquad \mathfrak{D}(u') = f(u) \qquad \left[\mathfrak{D}(u') \equiv \det. \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\| , f(0) = 1 \right]$$

che per piccole trasformazioni si limita ad imporre allo spostamento $\boldsymbol{s}(P_*) \equiv (u_1, u_2, u_3)$ la condizione

$$(5) \qquad \operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{s} = d_1 u \qquad (d_1 \text{ costante}).$$

Perciò, se si indica la pressione vincolare interna con $p^*(P_*)$ in C_* e $p(P_*)$ nella configurazione attuale, e si pone $u_{ih} = \frac{\partial u_i}{\partial y_h}$, $\bar{S}_{ih} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial u_{ih}}$, sussistono le formule

$$(6) \qquad \Delta_{ih} = \tilde{\omega} \delta_{ih} - \bar{S}_{ih} , \qquad (i, h = 1, 2, 3)$$

(5) Cfr. A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica tenute nell'Università di Napoli nell'anno accademico 1934–1935*.

(6) Cfr. A. Signorini, *Memoria* cit. in (2), pp. 341, 354.

ove si ha $\tilde{\omega} = p - p^*$, δ_{ih} simbolo di Kronecker, ed $\overline{S}$ è la forma quadratica nelle variabili u_{rs} ed u

$$(7) \qquad \overline{S}(u', u) \equiv \frac{1}{2} \sum_{r,s}^{1,2,\cdots,6} M^*_{rs}\, \eta_r\, \eta_s + p^* \sum_{i,h}^{1,2,3} \eta^2_{ih} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{ihl} X^*_{ih}\, u_{li}\, u_{ih} - u \sum_{ih}^{1,2,3} \overline{L}^*_{ih}\, \eta_{ih} - \frac{1}{2}\, \overline{c}^*\, u^2$$

con $\eta_r = \eta_{rr} = u_{rr}$ per $r \leq 3$, $2\,\eta_{rs} = u_{rs} + u_{sr} = \eta_{9-(r+s)}$ per $r \neq s$, $\overline{L}^*_{ih} = \overline{L}^*_{hi}$, che caratterizza con la sua struttura il particolare corpo elastico. Nel caso che siano presenti appoggi cedevoli, nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella di equilibrio forzato può esservi un parziale distacco dall'appoggio; perciò se si indica con l_* la porzione di Σ_* ove sono assegnate le forze, $\lambda_* = \Sigma_* - l_*$, e a_* la parte di λ_* che rimane vincolata, le (2) possono specificarsi nel modo seguente:

$$(2)' \qquad \sum_{1}^{3}{}_h\, \Delta_{ih}\, N^*_h = \begin{cases} f^*_i & \text{su } l^* \\ 0 & \text{su } \lambda_* - a_* \\ \varphi_i & \text{su } a_*. \end{cases}$$

Occorre ora ricordare che le (1)-(2)' possono sintetizzarsi nell'unica equazione scalare

$$(8) \qquad \int_{C_*} \sum_{ih} \Delta_{ih}\, v_{ih}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0,$$

purché la si pensi valida comunque si scelga il campo di vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$. Se poi nello scegliere $\boldsymbol{v}(P_*)$ ci si limita a un arbitrario campo solenoidale, $\boldsymbol{w}(P_*)$, l'equazione (8) [cfr. (6)] può anche scriversi nella forma

$$(9) \qquad -\int_{C_*} \sum_{rs}^{1,2,3} \overline{S}_{rs}\, w_{rs}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{w}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{w}\, d\Sigma_* + \int_{a_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{w}\, d\Sigma_* = 0.$$

Rispetto alle equazioni (1)-(2)' la (8) presenta il vantaggio di non imporre alle funzioni incognite Δ_{ih} alcuna proprietà differenziale, e si amplia così il campo delle funzioni nelle quali è possibile ricercare la soluzione. Si ricorda inoltre che la funzione $\overline{S}(u', u)$ caratteristica del corpo elastico, verifica la condizione

$$(10) \qquad \int_{C_*} \overline{S}(w', 0)\, dC_* \geq 0$$

per ogni spostamento isotermo solenoidale iniziantesi da C_*, l'uguaglianza a zero risultando soddisfatta solo in corrispondenza a spostamenti rigidi. Se si indica con $\varrho(P_*)$ un qualunque spostamento rigido, sussiste anche l'uguaglianza

$$\int_{C_*} \sum_{rs} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \rho_{rs}} (\rho', 0)\, w_{rs}\, dC_* = 0. \tag{11}$$

Si osservi infine che per lo stress X^*_{rs} sussiste la relazione

$$\int_{C_*} \sum_{ih} X^*_{ih}\, v_{ih}\, dC_* = 0 \tag{12}$$

purché il campo di vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$ si supponga completamente arbitrario.

3. *Forma quadratica* $\bar{S}(u', u)$ *espressa in funzione delle* η_{rs} *e delle componenti di* $\operatorname{rot}_{P_*} \boldsymbol{s}$: *alcune conseguenze.* – Se si pone $\rho_1 = u_{32} - u_{23}$, $\rho_2 = u_{13} - u_{31}$, $\rho_3 = u_{21} - u_{12}$, in virtù della corrispondenza biunivoca che esiste tra le nove u_{rs} da una parte, le η_j $(j = 1, 2, \cdots, 6)$ e le ρ_t $(t = 1, 2, 3)$ dall'altra, le funzioni $\bar{S}(u', u)$, $\mathfrak{D}(u')$ possono essere anche espresse nelle variabili η_j, ρ_t; e sussistono le relazioni

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial u_{rr}} (u', u) = \frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta_{rr}} (\eta, \rho, u), \tag{13}$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial u_{rs}} (u', u) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta_{rs}} (\eta, \rho, u) \pm \frac{\partial \bar{S}}{\partial \rho_t} (\eta, \rho, u)$$

valendo nel secondo gruppo il segno $+$ se (r, s, t) è una permutazione ciclica della fondamentale $(3, 2, 1)$, il segno $-$ in caso contrario. Ovviamente formole analoghe valgono per $\mathfrak{D}(u')$. Ponendo inoltre

$$Q(u') = \frac{1}{2} \sum_{rs}^{1,2,\cdots,6} M^*_{rs}\, \eta_r\, \eta_s + p^* \sum_{i,h}^{1,2,3} \eta^2_{ih} - \frac{1}{2} \sum_{ihl}^{1,2,3} X^*_{ih}\, u_{li}\, u_{lh}, \tag{14}$$

la (7) può scriversi

$$\bar{S}(u', u) = Q(u') - u \sum_{i,h} \bar{L}^*_{ih}\, \eta_{ih} - \frac{1}{2} \bar{c}^*\, u^2, \tag{7$'$}$$

e le (6) diventano

$$\Delta_{ih} = \tilde{\omega} \delta_{ih} - Q_{ih} + u \bar{L}^*_{ih}. \tag{6$'$}$$

Pensando la funzione $\bar{S}$ espressa nelle variabili η_j, ρ_t, u, quando si ponga

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta^{(u)}_{rs} = \Delta_{rs} - u \bar{L}^*_{rs} \quad ; \quad \Delta^{(u)}_{r} = \Delta^{(u)}_{rr} \quad , \quad \Delta^{(u)}_{3+r} = \frac{1}{2} (\Delta^{(u)}_{r+2,r+1} + \Delta^{(u)}_{r+1,r+2}), \\ &\qquad\qquad \Delta^{(u)}_{6+r} = \frac{1}{2} (\Delta^{(u)}_{r+2,r+1} - \Delta^{(u)}_{r+1,r+2}); \\ &L^*_{3+r} = \frac{1}{2} (L^*_{r+2,r+1} + L^*_{r+1,r+2}) \quad , \quad L^*_{6+r} = \frac{1}{2} (L^*_{r+2,r+1} - L^*_{r+1,r+2}), \\ &\qquad\qquad \eta_{6+r} = \rho_r, \qquad\qquad (r = 1, 2, 3) \end{aligned} \right. \tag{15}$$

le (6)′ si traducono nelle seguenti:

$$(6)'' \qquad \Delta_l^{(u)} = \tilde{\omega}\delta_l - \frac{\partial Q}{\partial \eta_l}(\eta), \qquad l = 1, 2, \cdots, 9, \quad \delta_l = \begin{cases} 1 & \text{per } l = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{per } l > 3. \end{cases}$$

Però la Q, senza essere degenere, potrebbe non dipendere effettivamente da qualcuna delle η_l con $l > 6$: ad esempio se il solido elastico è omogeneo o isotropo in C_*, si ha necessariamente [7] $X^*_{rs} = 0$, la $Q(u')$ diventa una forma quadratica nelle sole $\eta_1, \cdots, \eta_6$, e si ha insieme [cfr. (6), (13), (15)] $\Delta_{ih} = \Delta_{hi}$, $\Delta^{(u)}_{ih} = \Delta^{(u)}_{hi}$, $\Delta^{(u)}_7 = \Delta^{(u)}_8 = \Delta^{(u)}_9 = 0$; occorre anche ricordare che il rotore dell'eventuale spostamento rigido d'insieme associato allo spostamento elastico è completamente determinabile, in modo univoco, soltanto se la sollecitazione esterna non ammette assi di equilibrio [8]. Per tali motivi alle (6)″ conviene sostituire

$$(16) \qquad \begin{cases} \Delta_l^{(u)} = \tilde{\omega}\delta_l - \dfrac{\partial Q}{\partial \eta_l} & l = 1, 2, \cdots, n \qquad 6 \leq n \leq 9 \\ \Delta_l^{(u)} = 0 & \text{per} \quad n < l \leq 9. \end{cases}$$

Se nessuna ipotesi vien fatta sulla natura fisica del corpo elastico, esistono ovviamente infiniti stress ξ_{rs} compatibili con la sollecitazione e coi vincoli esterni imposti al corpo, e perciò tali che, posto

$$(17) \qquad \xi_r = \xi_{rr}, \quad \xi_{3+r} = \frac{1}{2}(\xi_{r+2,r+1} + \xi_{r+1,r+2}),$$

$$\xi_{6+r} = \frac{1}{2}(\xi_{r+2,r+1} - \xi_{r+1,r+2}) \qquad (r = 1, 2, 3),$$

risulti

$$(18) \qquad \int_{C_*} \sum_1^9{}_l\, \xi_l\, \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0,$$

ove s'è indicato con $\boldsymbol{\psi}$ il vettore delle reazioni corrispondenti su λ_* allo stress ξ_{rs}.

Queste reazioni, d'altra parte, sono tenute a soddisfare le condizioni globali fornite dalle equazioni cardinali della stereostatica, che possono sintetizzarsi nell'equazione scalare

$$(19) \qquad \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{w}^{(Q)}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{w}^{(Q)}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{w}^{(Q)}\, d\Sigma_* = 0,$$

ove $\boldsymbol{w}^{(Q)}$ indica un qualunque spostamento rigido compatibile coi vincoli imposti al corpo [cfr. (11)].

(7) Cfr. A. SIGNORINI, *Memoria* cit. in (2), p. 342.

(8) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 3ª, «Annali di Matematica», (IV), tomo XXXIX, 1955, p. 166.

4. *Forma reciproca della* $Q(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ *e alcune conseguenze notevoli.* – Pensando $Q(u')$ espressa mediante le η_l $(l = 1, 2, \cdots, n)$, si ponga

$$Q(u') = \frac{1}{2} \sum_{jl}^{1\cdots n} \bar{M}_{jl}\, \eta_j\, \eta_l \qquad (\bar{M}_{jl} = \bar{M}_{lj}) \tag{20}$$

e si ammetta che risulti

$$\det \|\bar{M}_{jl}\| \neq 0. \tag{21}$$

Le (16) diventano allora

$$\begin{cases} \Delta_l^{(u)} - \tilde{\omega}\delta_l = -Q_l \equiv -\sum_1^n {}_q \bar{M}_{lq}\, \eta_q & (l = 1, 2, \cdots, n \leq 9) \\ \Delta_l^{(u)} = 0 & (n \leq l \leq 9); \end{cases} \tag{16'}$$

e da esse, indicando con $m_{ql} = m_{lq}$ l'elemento reciproco di $\bar{M}_{lq}$, è lecito trarre

$$\begin{cases} \eta_l = -\sum_1^n {}_s m_{ls} (\Delta_s^{(u)} - \tilde{\omega}\delta_s) & (l = 1, 2, \cdots, n \leq 9) \\ \Delta_l^{(u)} = 0 & (n < l \leq 9). \end{cases} \tag{22}$$

Si può anche scrivere, ovviamente,

$$\eta_l = \tilde{\omega}\mu_l - \sum_1^n {}_s m_{ls}\, \Delta_s^{(u)} \qquad \left(\mu_l = \sum_1^3 {}_s m_{ls}\right); \tag{23}$$

e tenendo conto delle (23) si ottiene [cfr. (5)] $\operatorname{div}_{P_*} s \equiv \tilde{\omega}\nu - \sum_1^n {}_s \mu_s \Delta_s^{(u)} = d_1 u$ $\left(\nu = \sum_1^3 {}_l \mu_l\right)$, donde

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\nu}\left[d_1 u + \sum_1^n {}_s \mu_s\, \Delta_s^{(u)}\right]. \tag{24}$$

Se si introduce la forma quadratica

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi \mid u) &\equiv \frac{1}{2} \sum_{ls}^{1\cdots n} m_{ls}\, \xi_l\, \xi_s - \frac{1}{2\nu}\left(d_1 u + \sum_1^n {}_s \mu_s\, \xi_s\right)^2 \equiv \\ &\equiv R(\xi) - \frac{1}{2\nu}\left(d_1 u + \sum_1^n {}_s \mu_s\, \xi_s\right)^2, \end{aligned} \tag{25}$$

e nelle (22) si sostituisce a $\tilde{\omega}$ l'espressione (24), si ottiene

$$\eta_l = -\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}} (\Delta^{(u)} \mid u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n \leq 9). \tag{26}$$

D'altra parte, se nella (20) si tiene conto delle (22), si ottiene

$$Q(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \frac{1}{2} \bar{R}(\Delta^{(0)} \mid 0) + \frac{1}{2\nu}(d_1 u)^2 \qquad (\Delta_l^{(0)} = \Delta_l) \tag{27}$$

e la condizione (10), valida per ogni spostamento isotermo solenoidale, si traduce in

$$\int_{C_*} \overline{R}\,(\Delta^{(0)} \mid 0)\, dC_* \geq 0, \tag{28}$$

l'uguaglianza a zero intendendosi verificata soltanto in corrispondenza a spostamenti rigidi, ossia per quegli stress che sono soluzioni del sistema algebrico lineare non omogeneo e non degenere deducibile da (22), (24) ponendo $u = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_6 = 0$ ed $\eta_7, \cdots$ uguali ad altrettante componenti del rotore dello spostamento che volta a volta si considera.

§ 2. – TEOREMA DI MENABREA.

5. *Solido con appoggi cedevoli.* – Si ammetta dapprima che il vincolo consista in un appoggio unilaterale elasticamente cedevole e privo di attrito, e si prenda in esame la classe delle n–ple $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, che completate dalle condizioni $\xi_{n+1} = 0, \cdots, \xi_9 = 0$ forniscono la classe degli stress «ausiliari» soddisfacenti la (18), con $\boldsymbol{\psi}$ che verifichi, oltre la (19), la condizione

$$\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{N}^* \qquad (\psi \geq 0) \qquad \text{su} \quad \lambda_*, \tag{29}$$

$\mathbf{N}^*$ essendo il versore della normale a Σ_*, orientata verso l'interno del corpo elastico. Si ha evidentemente

$$\int_{C_*} \sum_{1}^{n}{}_l\, \xi_l\, \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^*\, \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* = 0 \tag{30}$$

per ogni campo di vettori $\boldsymbol{v}\,(P_*)$; e viceversa se una n–pla $\xi_1, \cdots, \xi_n$ soddisfa la (30), la 9–pla $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1} = 0, \cdots, \xi_9 = 0$ dà uno stress ausiliario. Si ponga poi [cfr. (15)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\xi}_l = \xi_l - \Delta_l \quad ; \quad \xi_l^{(u)} = \xi_l - u\overline{L}_l^* = \overline{\xi}_l + (\Delta_l - u\overline{L}_l^*) = \overline{\xi}_l + \Delta_l^{(u)} \\ \hfill (l = 1, 2, \cdots, n) \\ \overline{\xi}_{n+1} = 0, \cdots, \overline{\xi}_9 = 0 \quad ; \quad \xi_{n+1}^{(u)} = 0, \cdots, \xi_9^{(u)} = 0 \end{array} \right. \tag{31}$$

e si introduca il funzionale

$$\mathfrak{M}\,(\xi) = \int_{C_*} \overline{R}\,(\xi^{(u)} \mid u)\, dC_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e}\, d\Sigma_* \qquad (e, \text{ modulo elastico}). \tag{32}$$

Ricordando che la funzione $u\,(P_*)$ è da ritenere nota, si faccia ora l'ipotesi che esistano in tutto C_* una n–pla $\Delta_l^{(u)} = \Delta_l - u\overline{L}_l^*$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$

e uno spostamento $\boldsymbol{s}(P_*)$ tali da soddisfare le equazioni

$$(33)\qquad \int_{C_*} \sum_1^n {}_l\, \Delta_l\, \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC^* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* - \int_{a_*} e\, s_{N^*}\, v_{N^*}\, d\Sigma_* = 0,$$

$$\eta_l = -\frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}}\,(\Delta^{(u)} \mid u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n),$$

la prima da intendersi valida per ogni scelta del campo di vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$. Si può dimostrare allora che nella classe degli stress $\xi_l^{(u)}$ $(l = 1, 2, \cdots, 9)$ poc'anzi definiti, lo stress $\Delta_l^{(u)}$ $(l = 1, 2, \cdots, 9)$, in corrispondenza del quale il funzionale (32) assume l'espressione

$$\mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}\,(\Delta^{(u)} \mid u)\, dC_* + \frac{1}{2} \int_{a_*} e\,(s_{N^*})^2\, d\Sigma_*,$$

soddisfa la relazione

$$(34)\qquad \mathfrak{M}(\Delta) \leq \mathfrak{M}(\xi);$$

e l'uguaglianza si verifica soltanto quando le differenze $\overline{\xi}_l$ corrispondono, per il tramite delle (22), ad uno spostamento rigido d'insieme; in particolare si ha $\overline{\xi}_l = 0$ per ogni spostamento rigido traslatorio. Infatti da (30) e $(33)_1$ si trae, per differenza,

$$(35)\qquad \int_{C_*} \sum_l \overline{\xi}_l\, \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{\lambda_*} \psi\, v_{N^*}\, d\Sigma_* + \int_{a_*} e\, s_{N^*}\, v_{N^*}\, d\Sigma_* = 0$$

e vale inoltre la relazione

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \left[\overline{R}\,(\overline{\xi} \mid 0) + \sum_l \frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}}\,(\Delta^{(u)} \mid u)\, \overline{\xi}_l \right] dC_* + \frac{1}{2} \int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e}\, d\Sigma_* - \frac{1}{2} \int_{a_*} e\,(s_{N^*})^2\, d\Sigma_*,$$

donde, in virtù di $(33)_2$ segue

$$(36)\qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \left[\overline{R}\,(\overline{\xi} \mid 0) - \sum_l \eta_l\, \overline{\xi}_l \right] dC_* + \frac{1}{2} \left[\int_{\lambda_*} \frac{\psi^2}{e}\, d\Sigma_* - \int_{a_*} e\,(s_{N^*})^2\, d\Sigma_* \right].$$

In particolare, avendosi dalla (35), per $\boldsymbol{v}(P_*) = \boldsymbol{s}(P_*)$,

$$-\int_{C_*} \sum_l \overline{\xi}_l\, \eta_l\, dC_* = \int_{\lambda_*} \psi\, s_{N^*}\, d\Sigma_* + \int_{a_*} e\,(s_{N^*})^2\, d\Sigma_* \equiv \int_{\lambda_*} \overline{\psi}\, s_{N^*}\, d\Sigma_*,$$

ove s'è posto

$$(37)\qquad \varphi \equiv \frac{e}{2}\,(|s_{N^*}| - s_{N^*}) = \begin{cases} -e\, s_{N^*} & \text{su } a^* \\ 0 & \text{su } \lambda_* - a_* \end{cases}, \qquad \overline{\psi} = \psi - \varphi$$

dalla (36) si deduce

$$(38) \qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}\,(\overline{\xi}\,|\,0)\,dC_* + \int_{\lambda_*} \overline{\psi}\, s_{N*}\, d\Sigma_* + \frac{1}{2}\int_{\lambda_*} \frac{1}{e}(\psi^2 - \varphi^2)\, d\Sigma_* \,.$$

Tenendo conto delle posizioni (37) si può anche scrivere

$$(38)' \qquad \mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \overline{R}\,(\overline{\xi}\,|\,0)\,dC_* + \frac{1}{2}\int_{a_*} (\psi - \varphi)^2 \frac{1}{e}\, d\Sigma_* +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\lambda_* - a_*} (\psi^2 + 2\,\psi\, e\, s_{N*})\,\frac{1}{e}\, d\Sigma_* \,.$$

In questa gli ultimi due integrali per $\psi \equiv \varphi$ sono nulli, e per $\psi \not\equiv \varphi$ sono visibilmente positivi; perciò, in virtù di (28), si trae da (38)′ $\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) \geq 0$; e l'uguaglianza a zero si verifica soltanto per $\psi \equiv \varphi$ su λ_* e $\overline{\xi}_1, \cdots, \overline{\xi}_n, \overline{\xi}_{n+1} = 0, \cdots, \overline{\xi}_9 = 0$ corrispondenti in tutto C_* ad uno spostamento rigido d'insieme.

6. *Solido cui si assegna lo spostamento su una porzione della frontiera.* – Si supponga ora che sulla porzione λ_* della frontiera Σ_* di C_*, ove non è assegnata la sollecitazione, sia dato lo spostamento, $\zeta(P_*)$. Si consideri ancora in C_* la classe degli stress ausiliari $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1} = 0, \cdots, \xi_9 = 0$, che soddisfano la (18), con le reazioni vincolari esterne condizionate dalla sola (19). Sarà pur valida la (30), ma al funzionale (32) subentrerà l'altro (9)

$$(39) \qquad \mathfrak{M}(\xi) = \int_{C_*} \overline{R}\,(\xi^{(u)}|\,u)\,dC_* - \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\psi} \times \zeta\, d\Sigma_* \,.$$

Si ammetta quindi che esistano in tutto C_* una n–pla $\Delta_l^{(u)}$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$ e uno spostamento $\boldsymbol{s}(P_*)$ che su λ_* coincide con $\zeta(P_*)$, tali da soddisfare, almeno per una scelta $\boldsymbol{\varphi}$ del vettore $\boldsymbol{\psi}$, le equazioni

$$(40) \qquad \int_{C_*} \sum_1^n{}_l\, \Delta_l\, \eta_l^{(v)}\, dC_* + \int_{C_*} k^* \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}\, dC_* + \int_{l_*} \boldsymbol{f}^* \times \boldsymbol{v}\, d\Sigma_* + \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\varphi} \times \zeta\, d\Sigma_* = 0 \,,$$

$$\eta_l = -\frac{\partial \overline{R}}{\partial \Delta_l^{(u)}}(\Delta^{(u)}\,|\,u) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n),$$

la prima comunque si assegni il campo di vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$ che su λ_* si riduca a $\zeta(P_*)$. Ebbene nella classe degli stress ausiliari $\xi_l^{(u)}$ lo stress $\Delta_l^{(u)}$ $(l = 1, 2, \cdots, 9)$,

(9) Il funzionale (39) da qualche autore è chiamato « energia complementare ». Cfr. SOKOLNIKOFF, *Mathematical theory of elasticity*, McGraw–Hill Book Company, New York 1956, p. 389.

in corrispondenza del quale il funzionale (39) diventa

$$\mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \bar{R}(\Delta^{(u)} | u)\, dC_* - \int_{\lambda_*} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\zeta}\, d\Sigma_*,$$

verifica la relazione $\mathfrak{M}(\Delta) \leq \mathfrak{M}(\xi)$, avendosi l'uguaglianza soltanto quando le differenze $\bar{\xi}_l$ corrispondono ad uno spostamento rigido d'insieme. Invero da (30) e (40), limitando per entrambe la scelta dei vettori $\boldsymbol{v}(P_*)$ a quelli che su λ_* si riducono a $\boldsymbol{\zeta}(P_*)$, si trae $\int_{C_*} \sum_l \bar{\xi}_l \, \eta_l^{(v)} \, dC_* = - \int_{\lambda_*} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\zeta}\, d\Sigma_*$, donde, ponendo $\boldsymbol{v}(P_*) = \boldsymbol{s}(P_*)$ e tenendone conto nel valutare $\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta)$, si trae [cfr. (36)]

$$\mathfrak{M}(\xi) - \mathfrak{M}(\Delta) = \int_{C_*} \bar{R}(\bar{\xi} | 0)\, dC_* \geq 0.$$

Non c'è ormai che da ricordare la (28) e quanto su di essa è stato detto.