Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carol Kalik

Di una generalizzazione di un problema al contorno nel semispazio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 182–185.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_182_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Analisi matematica. — *Di una generalizzazione di un problema al contorno nel semispazio.* Nota di CAROL KALIK, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

RÉSUMÉ. — On étudie un problème aux limites pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles dans le demi-espace avec les conditions aux limites (2) et (3). On donne des conditions pour que le problème soit résoluble dans un espace fonctionnel précisé.

Nel lavoro [1] è formulato un problema di tipo Dirichlet per il semispazio per equazioni lineari a derivate parziali con coefficienti costanti senza però che si chieda l'appartenenza dell'equazione considerata ad una classe precisata, come sarebbe per esempio la classe delle equazioni ellittiche. Nella presente Nota desideriamo considerare un caso più generale, e cioè quello dei sistemi di equazioni lineari a derivate parziali e di alcune condizioni al contorno generali. Ricordiamo che useremo la denominazione « problema al contorno » perché nel caso dei sistemi ellittici il nostro problema è veramente un problema al contorno.

Il sistema considerato:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(D)\, u_j(x) = 0 \qquad \text{in} \quad x_n > 0 \tag{1}$$

dove $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$, $D = D_1 \cdot D_2 \cdots D_n$ e $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \cdots, n)$. E $A_{ij}(D)$ sono operatori differenziali lineari a coefficienti constanti.

Facciamo una sola ipotesi sul sistema (1): chiediamo che il polinomio caratteristico $P(\xi', \tau) = \det \| A_{ij}(\xi', \tau) \|$ sia dello stesso grado in τ per ogni $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$.

Siano $\tau_1(\xi'), \cdots, \tau_m(\xi')$ le radici dell'equazione caratteristica $P(\xi', \tau) = 0$, e consideriamo la successione di insiemi $R^{n-1} \supset \Omega_1 \supset \cdots \supset \Omega_m$ definiti in maniera seguente: $\xi' \in \Omega_1$ allora e solo allora quando esiste almeno una radice τ_k dell'equazione caratteristica in maniera che $\mathfrak{J}_m \tau_k(\xi') \geq 0$ nel punto ξ' considerato; $\xi' \in \Omega_2$ allora e solo allora quando esistono almeno due radici τ_k e τ_j dell'equazione caratteristica in modo che $\mathfrak{J}_m \tau_k(\xi') \geq 0$ e $\mathfrak{J}_m \tau_j(\xi') \geq 0$ nel punto ξ' considerato ecc.

Ricordiamo che Ω_1 può esser considerato come la somma di un numero finito di domini, perché $\mathfrak{J}_m \tau_k(\xi')$ $(k = 1, \cdots, m)$ sono delle funzioni algebriche. Questa stessa osservazione è valevole anche per $\Omega_2, \cdots, \Omega_m$.

Su Ω_l $(l = 1, \cdots, m)$ considereremo la funzione $P_l^+(\xi', \tau) = \prod_{k=1}^{l} (\tau - \tau_{l_k}(\xi'))$, dove $\tau_{l_k}(\xi')$ sono scelte in modo che $\mathfrak{J}_m \tau_{l_k}(\xi') \geq 0$ nel punto $\xi' \in \Omega_l$ con-

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

siderato. In ogni dominio che entra nella formazione di Ω_l questa funzione è un polinomio in τ.

Consideriamo le seguenti condizioni al contorno:

$$F'\left\{\sum_{j=1}^{N} B_{ij}(D)\, u_j(x)\,|_{x_n=0}\right\} = g_i(\xi') \quad (\xi' \in \Omega_l\,;\, i=1,\cdots,l\,;\, l=1,\cdots,m) \tag{2}$$

dove F' è la trasformazione di Fourier in rapporto con $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}) \in$ $\in R^{n-1}$, $B_{ij}(D)$ sono degli operatori differenziali lineari, $g_1(\xi')$ è una funzione data su Ω_1, $g_2(\xi')$ una funzione data su Ω_2 ecc.

Chiediamo anche che

$$|u(x)| = O(x_n^{\nu}) \qquad \text{per} \quad x_n \to +\infty\,. \tag{3}$$

Cercheremo la soluzione del problema al limite data dalle condizioni (1), (2) e (3) nella classe di funzioni $C_{\underset{p}{\rightarrow}}\mathcal{H}$, che è uno spazio topologico costruito nel seguente modo. Sia $l \geq 0$ un numero intiero qualunque e sia $\mathcal{H}_{-l} =$ $= \left\{ v(x') \in \mathcal{S}'(R^{n-1}) : \int_{R^{n-1}} \frac{|F'v(\xi')|^2}{(1+|\xi'|^2)^l}\, d\xi' < +\infty \right\}$, dove $\mathcal{S}'(R^{n-1})$ è lo spazio delle distribuzioni temperate. $\mathcal{H}_{-l}$ è uno spazio normato e completo. Si vede subito che $\mathcal{L}^2(R^{n-1}) = \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{-1} \subset \cdots \subset \mathcal{H}_{-n} \subset \cdots$ dove l'inclusione ha luogo tanto nel senso della teoria degli insiemi, quanto nel senso topologico. Sia $\mathcal{H} = \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{-l}$ considerato con topologia induttiva. Noteremo con $C_\lambda \mathcal{H}$ l'insieme lineare delle funzioni della forma $u(x', x_n)$ che appartengono a $\mathcal{H}$ per ogni $x_n \geq 0$ fissato, sono continue rispetto a x_n nella topologia di $\mathcal{H}$ e sono λ volte derivabili rispetto a x_n sempre nella topologia di $\mathcal{H}$. Sia $C_{\underset{p}{\rightarrow}}\mathcal{H} = C_{p_1}\mathcal{H} \times \cdots \times C_{p_N}\mathcal{H}$ dove p_k è l'ordine massimo di derivazione della funzione $u_k(x', x_n)$ rispetto a x_n, che appare nella (1) rispettivamente nella (2).

Dopo questi accertamenti siamo in grado di formulare con precisione il problema al contorno considerato: Sia $g_1(\xi')$ la restrizione su Ω_1 di un elemento da $F'\mathcal{H}$, $g_2(\xi')$ la restrizione su Ω_2 di un elemento sempre da $F'\mathcal{H}$ ecc. È da trovare $u(x', x_n) \in C_{\underset{p}{\rightarrow}}\mathcal{H}$, che soddisfa alle condizioni (1), (2) e (3).

Il risultato che riguarda l'esistenza e l'unicità di questo problema si trova formulato nel seguente teorema:

Teorema di base. Se le condizioni al contorno sono coerenti col sistema (1), cioè per qualunque $\xi' \in \Omega_l$ differente da zero, le righe della matrice prodotto

$$\| B_{ij}(\xi', \tau) \| \cdot \| A_{ij}^{*}(\xi', \tau) \|$$

sono linearmente indipendenti modulo $P_l^{+}(\xi', \tau)$ $(l = 1, \cdots, m)$, allora il problema al contorno formulato qui sopra ha un'unica soluzione.

Qui, gli elementi delle matrici considerate sono polinomi in τ, e $\| A_{ij}^{*}(\xi', \tau)\|$ è la matrice reciproca di $\| A_{ij}(\xi', \tau) \|$.

La dimostrazione di questo teorema si basa sul seguente schema. Avendo in vista la trasformazione di Fourier, è sufficiente dimostrare che il seguente problema

$$(1') \qquad \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\xi', D_n)\, v_j(\xi', x_n) = 0 \qquad \text{in} \quad x_n > 0$$

$$(2') \qquad \sum_{j=1}^{N} B_{ij}(\xi', D_n)\, v_j(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g_i(\xi') \qquad (\xi' \in \Omega_l\,;\, i=1,\cdots,l\,;\, l=1,\cdots,m)$$

$$(3') \qquad |v(\xi', x_n)| = O(x_n^{\nu}) \quad \text{quando} \quad x_n \to +\infty$$

ha soluzione unica per qualunque $\xi' \neq 0$, e che la funzione $v(\xi', x_n) \in F' \mathcal{H}$ per qualunque $x_n \geq 0$ fissato.

Applicando l'operatore di mediazione sul sistema (1′) si dimostra che qualsiasi soluzione $v(\xi', x_n)$ del sistema (1′) è infinitamente derivabile continuamente in rapporto con x_n.

Si sa che due matrici $\mathcal{S}(\xi', \tau)$ e $\mathcal{D}(\xi', \tau)$ in tal modo che $\mathcal{S}(\xi', \tau)\, \mathcal{A}(\xi', \tau) \cdot \mathcal{D}(\xi', \tau) \equiv [\mathcal{L}_1(\xi', \tau), \cdots, \mathcal{L}_N(\xi', \tau)]$ e $\det \mathcal{S}(\xi', \tau) \equiv \det \mathcal{D}(\xi', \tau) \equiv 1$ per τ. Qui $\mathcal{A}(\xi', \tau) = \| A_{ij}(\xi', \tau) \|$ e $[\mathcal{L}_1(\xi', \tau), \mathcal{L}_2(\xi', \tau), \cdots, \mathcal{L}_N(\xi', \tau)]$ è una matrice diagonale.

Prendendo in considerazione la trasformazione $v(\xi', x_n) = \mathcal{D}(\xi', D_n) \cdot w(\xi', x_n)$ si stabilisce direttamente che il problema al contorno (1′), (2′), (3′) è equivalente dal punto di vista dell'esistenza e dell'unicità della sua soluzione al seguente problema

$$(1'') \qquad \mathcal{L}_j(\xi', D_n)\, w_j(\xi', x_n) = 0 \qquad \text{in} \quad x_n > 0$$

$$(2'') \qquad \sum_{j=1}^{N} H_{ij}(\xi', D_n)\, w_j(\xi', x_n)|_{x_n=0} = g_i(\xi') \qquad (\xi' \in \Omega_l\,;\, i=1,\cdots,l\,;\, l=1,\cdots,m)$$

$$(3'') \qquad |w_j(\xi', x_n)| = O(x_n^{\nu}) \quad \text{quando} \quad x_n \to +\infty$$

dove $H_{ij}(\xi', \tau) = \sum_{k=1}^{N} B_{ik}(\xi', \tau)\, \mathcal{D}_{kj}(\xi', \tau)$. Però, essendo dato che per qualsiasi $\xi' \in \Omega_l$ fissato, (1″) è un'equazione differenziale a coefficienti costanti, le condizioni (1″) e (3″) possono fondersi scrivendo al loro posto

$$(1''') \qquad \mathcal{L}_j^{+}(\xi', D_n)\, w_j(\xi', x_n) = 0 \qquad \text{in } x_n > 0$$

dove

$$\mathcal{L}_j^{+}(\xi', \tau) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{l_j} (\tau - \tau_{j_k}^{+}(\xi')) & \text{se } l_j > 0 \\ 1 & \text{se } l_j = 0 \end{cases}$$

l_j essendo il numero delle radici dell'equazione $\mathcal{L}_j(\xi', \tau) = 0$ avendo la parte immaginaria non negativa, e $\tau_{j_k}^{+}(\xi')$ sono appunto queste radici.

D'altronde, notando con $G_{ij}(\xi', \tau)$ il resto della divisione del polinomio $H_{ij}(\xi', \tau)$ col polinomio $\mathfrak{L}_j^+(\xi', \tau)$ e notando $G_{ij}(\xi', \tau) = \sum_{\lambda=0}^{l_j-1} g_{ji}^{(\lambda)}(\xi')\, \tau^{(\lambda)}$ dalla condizione del teorema di base si deduce che il sistema di equazioni

$$\sum_{j=1}^{N_l^+} \sum_{\lambda=0}^{l_j-1} g_{ij}^{(\lambda)}(\xi')\, D_n^\lambda w_j(\xi', x_n)\,|_{x_n=0} = g_i(\xi') \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

ha soluzione unica per qualunque $\xi' \in \Omega_l$ fissato. Notiamo la soluzione di questo sistema con

$$(2''') \qquad D_n^\lambda w_j(\xi', x_n)\,|_{x_n=0} = h_j^\lambda(\xi')\ (j = 1, \cdots, N_l^+ ; \lambda = 0, \cdots, l_j - 1)$$

Le condizioni (1''') e (2'''), per ogni j rappresentano un problema classico di Cauchy. L'esistenza e l'unicità della sua soluzione sono conosciute.

In conformità col ragionamento fatto, risulta dunque, che il problema (1''), (2''), (3'') ha soluzione unica per qualunque $\xi' \neq 0$ fissato.

Sempre dal ragionamento fatto qui sopra deriva anche l'osservazione che $v(\xi', x_n)$ per qualunque ξ' è una combinazione lineare di funzioni della forma $Q_k(\xi', \tau)\, e^{i\tau_k^+(\xi')x_n}$, dove $Q_k(\xi', \tau)$ è un polinomio in τ e $\tau_k^+(\xi')$ è una radice dell'equazione caratteristica avendo la parte immaginaria non negativa. Tenendo conto della struttura degli insiemi Ω_l menzionata nell'introduzione si costata che R^{n-1} può esser rappresentato come la somma di un numero finito di domini scelti in modo che l'espressione della soluzione $v(\xi', x_n)$ non si cambi nel quadro di alcuno di questi domini. Questa costatazione ci permette di trarre la conclusione che la funzione $v(\xi', x_n)$ è misurabile per qualunque $x_n \geq 0$ fissato e che appartiene à $F' \mathcal{H}_{-\mu}$ per μ sufficientemente grande, dunque anche a $F' \mathcal{H}$.

BIBLIOGRAFIA.

G. E. SILOV, *Sui problemi al contorno corretti nel semispazio per equazioni con derivate parziali a coefficienti costanti*, «Uspehi Mat. Nauk», *19*, 3 (117), 3–52.