Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cezar Avramescu

Sur un problème aux limites non-linéaire

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 179–181.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_179_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica (Equazioni differenziali). — *Sur un problème aux limites non-linéaire.* Nota di CEZAR AVRAMESCU, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Lo scopo della presente Nota è quello di dare un teorema di esistenza delle soluzioni per il sistema (E) (L).

Soit C (J , R) l'espace de Banach des fonctions continues sur $J = [0, h]$, à valeurs réelles, muni de la topologie de la convergence uniforme sur J.

Posons,

$$S = \left\{ x ; x \in \mathop{\times}_{1}^{n} C(J, R) \quad , \quad |x_i(t)| \leq M_i \right\},$$

$$\Sigma = \{ x ; x \in R^n \quad , \quad |x_i| \leq M_i \},$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et R^n est l'espace euclidien à n dimension.

THÉORÈME. - *Admettons les hypothèses suivantes*:

a) $A_i(t, x) = A_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ *sont des fonctions définies et continues sur* $J \times \Sigma$

b) $B_i(t, x) = B_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ *sont des fonctions définies et continues dans* $J \times \Sigma$

c) $M_i \geq 2 \cdot \int_J \exp\left(\int_s^h a_i(u)\,du\right) b_i(s)\,ds$, *où* $a_i(t) = \sup_{x \in \Sigma} |A_i(t, x)|$ *et* $b_i(t) = \sup_{x \in \Sigma} |B_i(t, x)|$

d) *le système*

$$\text{(E)} \qquad x_i' = A_i(t, x)\,x_i + B_i(t, x)$$

admet une solution unique satisfaisant à la condition initiale

$$\text{(I)} \qquad x_i(0) = \xi_i,$$

pour tout $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \Sigma$

e) $F_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ *sont des opérateurs continus, définis sur* S *à valeurs dans* R, *satisfaisant aux conditions*,

$$\text{(1)} \qquad |F_i(x_1, \cdots, x_n)| \leq \frac{M_i - \int_J \exp\left(\int_s^h a_i(u)\,du\right) b_i(s)\,ds}{\exp \int_J a_i(s)\,ds}$$

$$\text{(2)} \qquad F_i(x_1, \cdots, x_n) \geq 0,$$

(*respectif* ≤ 0) *si* $x_i(t) \geq 0$ *dans* J (*respectif* $x_i(t) \leq 0$ *dans* J) *quel que soit* $x \in S$.

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

Alors le système (E) *admet au moins une solution satisfaisant à la condition*

$$\text{(L)} \qquad F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Démonstration. La solution unique du problème (E) + (I), satisfait à la rélation

$$\text{(3)} \qquad x_i(t) = \exp\left\{\int_0^t A_i(s, x(s))\, ds\right\} \cdot \xi_i +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{\int_s^t A_i(u, x(u))\, du\right\} \cdot B_i(s, x(s))\, ds$$

d'où il résulte que pour tout ξ_i satisfaisant à la condition

$$\text{(4)} \qquad |\xi_i| \leq N_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{M_i - \int_J \exp\left\{\int_s^h a_i(t)\, dt\right\} ds}{\exp \int_J a_i(t)\, dt},$$

cette solution est définie sur J. Si on note

$$\text{(5)} \qquad G_i(\xi_1, \cdots, \xi_n) = F_i(x_1, \cdots, x_n),$$

où $x_1, \cdots, x_n$, est la solution du problème (E)+(I), du fait que cette solution dépend d'une manière continue de $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, il s'ensuit que les fonctions G_i sont des fonctions continues sur l'ensemble $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} [-N_i, N_i]$ de R^n. De plus, comme on le vérifie aisément, on a $G_i(\xi_1, \cdots, -N_i, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_n) \leq 0$, $G_i(\xi_1, \cdots, N_i, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_n) \geq 0$, et $|G_i(\xi_1, \cdots, \xi_i)| \leq N_i$. D'après le théorème de C. Miranda [1], le système

$$\text{(6)} \qquad G_i(\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0$$

admet au moins une solution $\xi_1^0, \cdots, \xi_n^0$, dans $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} [-N_i, N_i]$. Alors la solution du problème (E) + (I) qui satisfait à la condition initiale $x_i(0) = \xi_i^0$ est une solution de notre problème.

COROLLAIRE. – *Admettons les hypothèses suivantes:*

i) $f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ *sont des fonctions définies et continues dans* $J \times \Sigma$

ii) $M_i \geq 2 \int_J c_i(t)\, dt$, *où* $c_i(t) = \sup\limits_{|x_j| \leq M_j} |f_i(t, x_1, \cdots, x_n)|$

iii) $F_i(x_1, \cdots, x_n)$ *sont des opérateurs définis et continus sur* S *à valeurs dans* R, *satisfaisant à la condition* (2) *et*

$$\text{(1')} \qquad |F_i(x_1, \cdots, x_n)| \leq M_i - \int_J c_i(t)\, dt.$$

Alors le système

$$\text{(E')} \qquad x_i' = f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$$

admet au moins une solution satisfaisant à la condition (L).

Pour la démonstration du corollaire on considère une suite $f_i^m(t, x)$ de fonctions définies sur $J \times \Sigma$, et y satisfaisant aux conditions $|f_i(t, x_1, \cdots, x_n)| \leq \leq c_i(t)$, telles que la solution du système

$$(\mathrm{E}_m) \qquad x_i' = f_i^m(t, x_1, \cdots, x_n),$$

soit unique pour tout m. Comme on sait, on peut choisir f_i^m de telle manière que $\lim_{m\to\infty} f_i^m(t, x_1, \cdots, x_n) = f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ uniformément sur $J \times \Sigma$. D'après le théorème démontré plus haut, le problème $(\mathrm{E}_m) + (\mathrm{L})$ admet au moins une solution; soit $(x_1^m(t), \cdots, x_n^m(t))$ une solution du problème $(\mathrm{E}_m) + (\mathrm{L})$. Parce que $|x_i^m(t)| \leq \mathrm{M}_i$ et $|d/dt(x_i^m(t))| \leq c_i(t)$, il en résulte d'après le théorème d'Ascoli–Arzelá que la suite $(x_1^m(t), \cdots, x_n^m(t))$ est compacte dans $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}(\mathrm{J}, \mathrm{R})$. Il existe donc une soussuite de $(x_1^m(t), \cdots, x_n^m(t))$ qui converge uniformément sur J vers une fonction $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$. Compte tenant du théorème de la dépendance continue des solutions par rapport aux fonctions f_i, il résulte que la fonction limite $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ est une solution du système (E'). En vertu de la continuité des opérateurs F_i, il résulte que cette solution satisfait à la condition (L).

Un exemple de condition aux limites satisfaisant aux conditions éxigées dans notre théorème est le suivant,

$$\int_J \mathrm{K}_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t))\, \mathrm{d}t = 0,$$

$\mathrm{K}_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ étant des fonctions continues dans $J \times \Sigma$, dont les valeurs absolues sont suffisamment petites, satisfaisant aux conditions

$$x_i \mathrm{K}_i(t, x_1, \cdots, x_n) \geq 0.$$

Cette inégalité est satisfaite si par exemple K_i est de la forme,

$$\mathrm{K}_i(t, x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{H}_i^2(t, x_1, \cdots, x_n) \cdot h_i(x_i),$$

$h_i(x)$ étant une fonction impaire.

En finissant ce travail, remarquons q'un problème aux limites du même type que (E) + (L) a été considéré par C. Avramescu [2], et G. Pulvirenti et G. Santagati [3]. On doit une analyse détaillée des divers types de problèmes aux limites à R. Conti [4]; dans la classification donnée par cet auteur, le problème (E) + (L) appartient au groupe de problèmes du type VI.

OUVRAGES CITÉES.

[1] C. MIRANDA, *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*, « Boll. Un. Mat. Ital. », serie 2, vol. 3 (1940–41).

[2] C. AVRAMESCU, *Systèmes différentiels à conditions aux limites générales* (*en roumain*), « Bul. Inst. Pol. Iasi », tom. XI (XV), 3–4 (1965).

[3] G. PULVIRENTI et G. SANTAGATI, *Esistenza, unicità e dipendenza continua per una classe di problemi ai limiti non lineari*, « Annali Mat. Pura Appl. », serie IV, tom. LXXVI (1967).

[4] R. CONTI, *Recent trends in theory of boundary value problems for ordinary differential equations* « Boll. U. M. I. » (3) XXII (1967).