Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Guerra

Sulla migliore uniforme approssimazione di funzioni continue di più variabili mediante polinomi ordinari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 172–178.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_172_0>

Analisi matematica. — *Sulla migliore uniforme approssimazione di funzioni continue di più variabili mediante polinomi ordinari* (*). Nota di Sergio Guerra, presentata (**) dal Socio G. Sansone.

SUMMARY. — In this paper the known theorem of Jackson is extended and the optimum for the absolute constant is attained in the m–dimensional case. The result is obtained through techniques like [2] and [3] here adapted to m–dimensions.

In un precedente lavoro [3], precisando un ben noto teorema di Jackson [1], si è provato che, se $f(x) \in C[-1, 1]$ col modulo di continuità $\omega_f(\delta)$, fissato l'intero positivo n, esistono e un polinomio ordinario $P_n(x)$, di grado non superiore ad n ed una costante assoluta $M \leq 1$, tali che per essi risulta

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_n(x)| \leq M\omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$

In [4] si è poi provato, con un esempio, che $M = 1$ rappresenta la migliore costante. Con la presente Nota si estendono questi risultati al caso di funzioni continue di più variabili (cfr. il teorema del n. 5 e il n. 6).

1. – Detto

$$R^m \equiv \{\theta\,;\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m)\} \tag{1}$$

lo spazio reale euclideo ad m dimensioni, indichiamo con G_ν, la classe delle funzioni $g(\theta)$ continue nell'ipercubo

$$Q_\nu \equiv \left\{\theta\,; -\frac{\pi}{2^\nu} \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2^\nu}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad \nu \text{ intero non negativo}\right\}, \tag{2}$$

pari rispetto a ciascuna delle variabili e prolungate su R^m per periodicità $\pi/2^{\nu-1}$ rispetto a θ_i $(i = 1, \cdots, m)$.

La parità implica per la serie di Fourier di una qualsiasi $g(\theta) \in G_\nu$ la forma

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{r_1, \ldots, r_m} \lambda_{r_1, \ldots, r_m} \cdot a_{r_1, \ldots, r_m} \cdot \cos r_1 \theta_1 \cdots \cos r_m \theta_m, \tag{3}$$

con

$$\lambda_{r_1, \ldots, r_m} = \frac{1}{2^{m-k}} \qquad (k \text{ numero degli indici } r_i \text{ non nulli}) \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 24 del C.N.R. (1967–68).
(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

e

$$(5) \qquad a_{r_1,\cdots,r_m} = \frac{1}{\pi^m} \int \cdots \int_{Q_0} g(t_1, \cdots, t_m) \cos r_1 t_1 \cdots \cos r_m t_m \, dt_1 \cdots dt_m .$$

La periodicità implica poi

$$(6) \qquad a_{r_1,\cdots,r_m} = 0$$

tutte le volte che, per uno almeno degli indici r_i, diciamolo r_j, risulta

$$(7) \qquad r_j \not\equiv 0 \pmod{2^\nu} .$$

I coefficienti (5) che figurano effettivamente in (3) sono pertanto del tipo

$$(8) \qquad a_{2^\nu h_1,\cdots,2^\nu h_m} ,$$

con $h_1, \cdots, h_m$ interi non negativi. Per semplicità di scrittura porremo, d'ora in poi,

$$(9) \qquad s_i = 2^\nu h_i \qquad (i = 1, \cdots, m) .$$

2. – In corrispondenza ad ogni $g(\theta) \in G_\nu$ consideriamo un operatore lineare $A(g;\theta)$ del tipo

$$(10) \qquad A(g;\theta) = \sum_0^n {}_{h_1,\cdots,h_m} \lambda_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \cos s_1 \theta_1 \cdots \cos s_m \theta_m ,$$

con i $\rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m}$ costanti.

Risulta

$$(11) \qquad A(g;\theta) = P_n(\cos 2^\nu \theta_1, \cdots, \cos 2^\nu \theta_m) ,$$

con $P_n(x_1, \cdots, x_m)$ polinomio algebrico di ordine non superiore ad n rispetto a ciascuna delle variabili.

Basta per questo osservare che

$$(12) \qquad \cos s_i \theta_i = \cos 2^\nu h_i \theta_i = T_{h_i}(\cos 2^\nu \theta_i) ,$$

essendo $T_{h_i}(x)$ il polinomio di Tchebyschev, di 1ª specie, di ordine h_i.

Posto

$$(13) \quad \varphi_n(u) = \varphi_n(u_1, \cdots, u_m) = \sum_0^n {}_{h_1,\cdots,h_m} \lambda_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \cos h_1 u_1 \cdots \cos h_m u_m ,$$

l'operatore (10) può infine scriversi nella forma

$$(14) \qquad A(g;\theta) = \frac{1}{\pi^m} \int_{Q_0} g\left(\frac{u}{2^\nu} + \theta\right) \varphi_n(u) \, du .$$

Infatti, poiché Q_0 contiene $2^{m\nu}$ ipercubi di lato $\pi/2^{\nu-1}$, per la supposta periodicità, risulta

$$a_{s_1,\cdots,s_m} = \frac{2^{m\nu}}{\pi^m} \int \cdots \int_{Q_\nu} g(t_1, \cdots, t_m) \cos s_1 t_1 \cdots \cos s_m t_m \, dt_1 \cdots dt_m ;$$

da questa, per la parità della $g(\theta)$, segue allora

$$A(g;\theta) = \frac{2^{m\nu}}{\pi^m} \cdot \sum_0^n {}_{h_1,\cdots,h_m} \lambda_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \int_{Q_\nu} \cdots \int g(t_1,\cdots,t_m) \cdot$$

$$\cdot \cos s_1 t_1 \cdots \cos s_m t_m \cdot \cos s_1 \theta_1 \cdots \cos s_m \theta_m \, dt_1 \cdots dt_m =$$

$$= \frac{2^{m\nu}}{\pi^m} \int_{Q_\nu} \cdots \int g(t_1,\cdots,t_m) \sum_0^n {}_{h_1,\cdots,h_m} \lambda_{h_1,\cdots,h_m} \cdot \rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m} \cdot$$

$$\cdot \cos s_1 (t_1 - \theta_1) \cdots \cos s_m (t_m - \theta_m) \, dt_1 \cdots dt_m$$

e quindi, posto

$$2^\nu (t_i - \theta_i) = u_i \qquad (i = 1,\cdots,m),$$

la (14).

3. – Dimostriamo i due lemmi seguenti.

LEMMA I. – *È possibile determinare le costanti* $\rho^{(n)}_{h_1,\cdots,h_m}$ *in modo che per esse risulti*

1) $\varphi_n(u) \geq 0$, *per ogni* $u \in Q_0$;
2) $\rho^{(n)}_{0,\cdots,0} = 1$;
3) $\rho^{(n)}_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_m} = \cos \frac{\pi}{n+2} \qquad (i = 1,\cdots,m)$,

essendo $\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{per } j = i \\ 0 & \text{per } j \neq i \,. \end{cases}$

Si consideri la funzione

$$\chi_n(u) = H_n \cdot \left| \sum_{r=0}^n c_r \omega_1^r \right|^2 \cdots \left| \sum_{r=0}^n c_r \omega_m^r \right|^2,$$

con

$$c_r = \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{n+2} \quad , \quad H_n = \left(2 \sum_{r=0}^n c_r^2\right)^{-m} \quad , \quad \omega_j = e^{iu_j} \qquad (j = 1,\cdots,m).$$

Essa è della forma (13); si ha infatti, con ovvie notazioni,

$$\chi_n(u) = H_n \left(\sum_{r=0}^n c_r \omega_1^r\right)\left(\sum_{r=0}^n \overline{c_r \omega_1^r}\right) \cdots \left(\sum_{r=0}^n c_r \omega_m^r\right)\left(\sum_{r=0}^n \overline{c_r \omega_m^r}\right) =$$

$$= H_n \sum_0^n {}_{r,s} c_r c_s e^{i(r-s)u_1} \cdot \cdots \cdot \sum_0^n {}_{r,s} c_r c_s e^{i(r-s)u_m} =$$

$$= H_n \left\{ \sum_{r=0}^n c_r c_r + 2 \sum_{r=0}^{n-1} c_r c_{r+1} \cos u_1 + 2 \sum_{r=0}^{n-2} c_r c_{r+2} \cos 2u_1 + \cdots + 2 c_0 c_n \cos n u_1 \right\} \cdot$$

$$\cdot \cdots \cdot \left\{ \sum_{r=0}^n c_r c_r + 2 \sum_{r=0}^{n-1} c_r c_{r+1} \cos u_m + 2 \sum_{r=0}^{n-2} c_r c_{r+2} \cos 2u_m + \cdots + 2 c_0 c_n \cos n u_m \right\} \cdot$$

La proprietà 1) è verificata ovviamente. Essendo inoltre

$$H_n \sum_{r=0}^{n} c_r c_r \cdots \sum_{r=0}^{n} c_r c_r = H_n \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^m = \frac{1}{2^m},$$

dalla (4), segue la 2).

Per quanto riguarda la 3) si osservi che, per essere

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi}{n+2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{n+2} + \operatorname{sen} \frac{(r-1)\pi}{n+2} \right],$$

cioè

$$c_{r-1} \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{2} (c_{r-2} + c_r)$$

e quindi

$$c_{r-1}^2 \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{2} (c_{r-2}\, c_{r-1} + c_{r-1}\, c_r),$$

risulta

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \sum_{r=0}^{n+1} c_{r-1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n+1} (c_{r-2}\, c_{r-1} + c_{r-1}\, c_r).$$

Ma $c_{-1} = \operatorname{sen} 0 = 0$, $c_{n+1} = \operatorname{sen} \pi = 0$ e, pertanto,

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \sum_{r=0}^{n} c_r^2 = \sum_{r=0}^{n-1} c_r\, c_{r+1}.$$

Da questa e dalla (4) segue allora, qualunque sia l'indice i,

$$\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \rho^{(n)}_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_m} = 2\, H_n \sum_{r=0}^{n-1} c_r\, c_{r+1} \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^{m-1} =$$

$$= 2\, H_n \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^{m-1} = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

D'ora in poi supporremo sempre, anche se ciò non sarà esplicitamente detto, che le costanti $\rho^{(n)}_{h_1, \ldots, h_m}$ siano scelte come indicato nella dimostrazione del lemma precedente; supporremo cioè che, per il polinomio trigonometrico (13), siano rispettate le proprietà 1), 2) e 3).

LEMMA II. – *Vale la seguente disuguaglianza*

$$\frac{1}{\pi^m} \int_{Q_0} \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i|\, \varphi_n(u) \right) du \leq m\pi \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n+2}}. \tag{15}$$

Poiché, per $0 \leq u_i \leq \frac{\pi}{2}$, è $\frac{2\, u_i}{\pi} \leq \operatorname{sen} u_i$, si ha

$$\frac{1}{\pi^m} \int_{Q_0} |u_i|\, \varphi_n(u)\, du = \frac{2}{\pi^m} \int_{Q_0} \left| \frac{u_i}{2} \right| \varphi_n(u)\, du \leq \frac{1}{\pi^{m-1}} \int_{Q_0} \operatorname{sen} \left| \frac{u_i}{2} \right| \varphi_n(u)\, du\,;$$

per la disuguaglianza di Schwartz e per essere

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0} \varphi_n(u)\,du = 1,$$

segue inoltre

$$\frac{1}{\pi^{m-1}}\int_{Q_0} \operatorname{sen}\left|\frac{u_i}{2}\right| \varphi_n(u)\,du \leq \frac{1}{\pi^{m-1}}\sqrt{\int_{Q_0} \operatorname{sen}^2\frac{u_i}{2}\,\varphi_n(u)\,du}\cdot\sqrt{\int_{Q_0}\varphi_n(u)\,du} =$$

$$= \pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}(1-\cos u_i)\,\varphi_n(u)\,du} =$$

$$= \pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}\cos u_i\,\varphi_n(u)\,du} = \pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n+2}}\,.$$

Se allora scriviamo le m disuguaglianze che si deducono da quella ora ottenuta dando all'indice i successivamente i valori $1,\cdots,m$ e sommiamo queste membro a membro, si perviene alla (15).

4. – Sia $g(\theta)\in G_\nu$; detto

$$\omega_g(\delta) = \max_{\|\theta-\tilde\theta\|\leq\delta} |g(\theta)-g(\tilde\theta)| \quad , \quad \|\theta-\tilde\theta\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\theta_i-\tilde\theta_i)^2},$$

il suo modulo di continuità, sussiste la disuguaglianza espressa dal seguente

TEOREMA. – *Per ogni* $\theta\in Q_0$ *risulta*

$$\text{(17)} \qquad |g(\theta)-A(g;\theta)| < \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+m\cdot\frac{\pi^2}{2^{\nu+1}}\right).$$

In virtù della (16) si può scrivere

$$g(\theta) = \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0} g(\theta)\,\varphi_n(u)\,du$$

e quindi, tenendo conto della (14),

$$A_n(g;\theta)-g(\theta) = \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}\left[g\left(\frac{u}{2^\nu}+\theta\right)-g(\theta)\right]\varphi_n(u)\,du\,.$$

Da questa, per note proprietà del modulo di continuità e per il lemma II, segue allora

$$|A(g;\theta)-g(\theta)| \leq \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}\left|g\left(\frac{u}{2^\nu}+\theta\right)-g(\theta)\right|\varphi_n(u)\,du \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}\omega_g\left(\frac{\|u\|}{2^\nu}\right)\varphi_n(u)\,du = \frac{1}{\pi^m}\int_{Q_0}\omega_g\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\|u\|}{2^\nu}\cdot n\right)\varphi_n(u)\,du \leq$$

$$\leq \omega_g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\pi^m} \int_{Q_0} \left(1 + \frac{n}{2^\nu} \|u\|\right) \varphi_n(u)\, du = \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{n}{\pi^m \cdot 2^\nu} \int_{Q_0} \|u\| \varphi_n(u)\, du\right] \leq$$

$$\leq \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{n}{\pi^m \cdot 2^\nu} \int_{Q_0} \left(\sum_{i=1}^m |u_i|\right) \varphi_n(u)\, du\right] \leq$$

$$\leq \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{n\pi}{2^\nu \sqrt{2}} \cdot m \sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}\right) =$$

$$= \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{n\pi}{2^\nu} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+4}\right) \leq \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{n\pi}{2^\nu} \cdot \frac{\pi}{2n+4}\right) <$$

$$< \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{n\pi}{2^\nu} \cdot \frac{\pi}{2n}\right) = \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2^{\nu+1}}\right).$$

5. – Sia ora C [U] lo spazio delle funzioni continue sull'ipercubo

$$U \equiv \{x\,;\, -1 \leq x_i \leq 1\,,\, i = 1\,,\cdots, m\} \tag{18}$$

di R^m.

Dimostriamo il seguente

LEMMA. – *Se* $f(x) \in C[U]$ *col modulo di continuità* $\omega_f(\delta)$ *e se* $\omega_g(\delta)$ *è il modulo di continuità della funzione*

$$g(\theta) = f(\cos 2^\nu \theta),$$

allora risulta

$$\omega_g(\delta) \leq \omega_f(\delta). \tag{19}$$

È infatti

$$\|x - \tilde{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \tilde{x}_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\cos 2^\nu \theta_i - \cos 2^\nu \tilde{\theta}_i)^2} \leq$$

$$\leq 2^\nu \sqrt{\sum_{i=1}^m (\theta_i - \tilde{\theta}_i)^2} = 2^\nu \|\theta - \tilde{\theta}\|,$$

da cui

$$\omega_g(\delta) = \max_{\|\theta - \tilde{\theta}\| \leq \delta} |g(\theta) - g(\tilde{\theta})| = \max_{\|\theta - \tilde{\theta}\| \leq \delta} |f(\cos 2^\nu \theta) - f(\cos 2^\nu \tilde{\theta})| \leq$$

$$\leq \max_{\|x - \tilde{x}\| \leq \delta} |f(x) - f(\tilde{x})| = \omega_f(\delta).$$

Vale allora il seguente

TEOREMA. – *Se* $f(x) \in C[U]$ *col modulo di continuità* $\omega_f(\delta)$, *fissato l'intero positivo* n, *esiste un polinomio algebrico* $P_n(x)$, *di ordine non superiore ad* n *rispetto a ciascuna delle variabili, tale che, per ogni* $x \in U$, *risulta*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\omega_f\left(\frac{1}{n}\right), \tag{20}$$

con M *costante positiva assoluta* ≤ 1.

La sostituzione

$$x = \cos 2^{\nu} \theta \tag{21}$$

trasforma U nell'ipercubo Q_ν e la $f(x)$ in una funzione $g(\theta) = f(\cos 2^\nu \theta) \in G_\nu$.

Se $\theta \in Q_\nu$, per la (11) e per la (17), risulta

$$|A(g; \theta) - g(\theta)| = |P_n(\cos 2^\nu \theta) - f(\cos 2^\nu \theta)| < \omega_g\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2^{\nu+1}}\right).$$

Da questa, per la (21) e per il lemma precedente, segue

$$|f(x) - P_n(x)| < \omega_f\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2^{\nu+1}}\right),$$

per ogni $x \in U$.

Valendo la disuguaglianza ora ottenuta qualunque sia l'intero non negativo ν e poiché n non dipende da ν, passando al limite per $\nu \to \infty$ si giunge infine alla tesi.

6. – Nella (20) $M = 1$ rappresenta la *migliore* costante, qualunque sia la dimensione m dello spazio ambiente.

Per verificare quanto asserito, fissato comunque m, basta considerare in U la funzione $f(x)$ (continua) così definita:

1) $f(x)$ è costante rispetto ad x_i $(i = 2, \cdots, m)$,

2) $f(x)$ è pari rispetto ad x_1,

3) $f(x) = \begin{cases} -kx_1 + (2r+1), & \text{per } \frac{2r}{k} \le x_1 \le \frac{2r+1}{k} \quad \left(r = 0, 1, \cdots, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right) \\ kx_1 - (2r+1), & \text{per } \frac{2r+1}{k} \le x_1 \le \frac{2r+2}{k} \quad \left(r = 0, 1, \cdots, \left[\frac{k-2}{2}\right]\right), \end{cases}$

k intero positivo ed osservare che, per tale $f(x)$, scelto $n = 2k - 1$, per ogni $M_* < 1$, esiste almeno un k per il quale risulti

$$E_n(f) > M_* \, \omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ [1]},$$

essendo $E_n(f)$ la minima deviazione da $f(x)$, nel senso di Tchebyschev.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. JACKSON, *The theory of Approximations*, New York (1930).

[2] P. P. KOROVKIN, *Linear operators and approximations theory*, Hindustan Publ. Corp. (India) (1960).

[3] S. GUERRA, *Osservazioni su un noto teorema di Jackson*, « Boll. U M.I. », (3), vol. 18 (1963), pp. 57–64.

[4] S. GUERRA, *L'optimum per la costante nel classico teorema d'approssimazione di Jackson*, « Boll. U.M.I. », (3), vol. XXII (1967), pp. 205–207.

(1) Cfr. [4].