
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA PIA COLAUTTI

**Sulle vibrazioni trasversali di una biella cuneiforme
appoggiata agli estremi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.2, p. 158–171.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_158_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Analisi numerica. — *Sulle vibrazioni trasversali di una biella cuneiforme appoggiata agli estremi* (*). Nota di MARIA PIA COLAUTTI, presentata(**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Upper and lower bounds are given to the eigenvalues of a differential problem connected with the transverse vibrations of a wedge-shaped, simply supported beam.

Il problema del calcolo delle frequenze proprie relative alle vibrazioni trasversali di una biella a forma di cuneo, appoggiata ai suoi estremi, conduce al calcolo degli autovalori del seguente problema ai limiti per una equazione differenziale ordinaria:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left[(1 - \theta x)^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - \lambda (1 - \theta x) u = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

ove θ è una costante, non negativa, minore di uno. Diversi Autori si sono occupati del calcolo dei detti autovalori che, come con procedimento classico si dimostra, costituiscono una successione, non decrescente, $\{\lambda_k\}$ di numeri positivi. Si noti che, per $\theta = 0$, gli autovalori del problema (I) sono $\lambda_k = k^4 \pi^4$.

Il primo a fornire rigorose limitazioni, per difetto e per eccesso, del più basso autovalore λ_1 , il calcolo del quale è il più interessante dal punto di vista delle applicazioni alla tecnica, è stato F. G. Tricomi che, nel 1936 (cfr. [8] e, anche, [9]), ha determinato un intervallo nel quale è contenuto $\sqrt[3]{\lambda_1}$, per $\theta = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7$. Per $\theta = 0.5$, la disuguaglianza di Tricomi è la seguente:

$$\pi^2 0.7014 < \sqrt[3]{\lambda_1} < \pi^2 0.7660.$$

Il problema è stato successivamente studiato all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, dove è stato applicato, fino alla quarta approssimazione, un metodo generale di M. Picone, relativo al calcolo degli autovalori e delle autofunzioni di problemi non necessariamente autoaggiunti (cfr. [6]). Tale metodo, però, non fornisce la maggiorazione dell'errore delle varie approssimazioni. I risultati ottenuti all'I.N.A.C. furono, nel 1941, pubblicati da T. Viola [10]. Essi, per quanto concerne gli autovalori, nel caso $\theta = 0.5$, sono i seguenti:

(*) The research reported in this paper has been sponsored in part by the Aerospace Research Laboratory, under Grant AF EOAR 66-48 through the European Office of Aerospace Research (OAR), United States Air Force.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1968.

(I)

λ_k	I ^a appross.	II ^a appross.	III ^a appross.	IV ^a appross.
$k = 1$	48.194	48.720	50.890	50.8129
$k = 2$	-----	852.95	838.	836.9412
$k = 3$	-----	-----	-----	4256.878

Nel 1964, al Simposio sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, tenutosi in Sardegna, G. Fichera [3] comunicò i risultati ottenuti applicando il metodo degli invarianti ortogonali, a lui dovuto (cfr. [4]), e fornendo, nel caso $\theta = 0.5$, limitazioni per i primi sette autovalori. Io stessa avevo fornito i risultati analitici, relativi alle applicazioni del metodo, laddove i risultati numerici erano stati ottenuti al Centro di Calcolo dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma. Successivamente, tali risultati numerici erano stati ulteriormente perfezionati, mediante approssimazioni più spinte, grazie alla collaborazione di G. Blanch e del Centro di Calcolo (meccanicamente assai più dotato di quello di Roma) degli Aerospace Research Laboratories della Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. Tali ulteriori risultati sono stati presentati da G. Fichera [2] all'VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana a Trieste, nell'ottobre 1967. Essi, relativamente ai primi otto autovalori, forniscono la seguente tabella di valori per difetto e per eccesso.

(II)

λ_k	Difetti	Eccessi
$k = 1$	50.713	50.7163
$k = 2$	837.35	838.21
$k = 3$	4200	4223
$k = 4$	13093	13306
$k = 5$	31201	32432
$k = 6$	62109	67185
$k = 7$	108043	124390
$k = 8$	168612	212111

Nel 1966 è apparsa una Memoria di N. Bazley e D. W. Fox [1], nella quale, fra l'altro, come applicazione dei profondi contributi recati da questi Autori al metodo dei « problemi intermedi » per il calcolo per difetto degli

autovalori, è considerato il seguente problema:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1 + a\xi)^3 \frac{d^2 u}{d\xi^2} \right] - \sigma (1 + a\xi) u = 0, & 0 < \xi < \pi \\ u(0) = u(\pi) = u''(0) = u''(\pi) = 0, \end{cases}$$

a è una costante positiva.

Facendo il cambiamento di variabile $x = -\xi\pi^{-1} + 1$, e ponendo $a = \pi^{-1} \theta (1 - \theta)^{-1}$, il problema (2) si riduce al problema (1) e l'autovalore σ_k ($k = 1, 2, \dots$) di (2) si esprime al modo seguente, per mezzo di λ_k :

$$(3) \quad \sigma_k = \frac{\lambda_k}{\pi^4 (1 - \theta)^2}.$$

In [1] è data la seguente tabella di valori per difetto e per eccesso dei primi cinque autovalori di (2), nel caso $a = \pi^{-1}$ (cioè $\theta = 0.5$):

(III)

λ_k	Difetti	Eccessi
$k = 1$	2.0826	2.0826
$k = 2$	34.419	34.420
$k = 3$	173.37	173.38
$k = 4$	546.33	546.40
$k = 5$	1331.4	1331.8

Scopo della presente Nota è perfezionare ulteriormente i risultati di [2], usando un invariante ortogonale di grado maggiore rispetto a quello che era stato impiegato per ottenere i risultati di [2]. Precisamente, detti risultati erano stati ottenuti usando la formula contenuta a pag. 156 di [4], nel caso $s = 1$ e $n = 1$. Noi, invece, ci serviremo di tale formula nel caso $s = 1$, $n = 2$. Ciò ci condurrà a dover superare difficoltà algoritmiche assai maggiori. Tuttavia, i risultati numerici ottenuti compensano pienamente delle più gravi complicazioni analitiche incontrate.

1. *Traduzione in equazione integrale del problema (1) e calcolo di due invarianti ortogonali.*

Sia $0 < \theta < 1$. Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}^2(0, 1)$. L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(4) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[(1 - \theta x)^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right] = \varphi(x)$$

è il seguente:

$$(5) \quad u(x) = c_1 (1 - \theta x)^{-1} + c_2 \log(1 - \theta x) + c_3 (1 - \theta x) + c_4 + \int_0^x R(x, \xi; \theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

essendo c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie e avendo posto:

$$R(x, \xi; \theta) = \frac{1}{2\theta^3} \left\{ \log \left(\frac{1 - \theta x}{1 - \theta \xi} \right)^2 + \theta(x - \xi) \left(\frac{1}{1 - \theta x} + \frac{1}{1 - \theta \xi} \right) \right\}.$$

La (5) definisce, come assai facilmente si constata, una funzione continua con le sue derivate prima, seconda e terza, nell'intervallo chiuso $(0, 1)$. Inoltre, la $u'''(x)$ è assolutamente continua in $(0, 1)$ e la sua derivata appartiene a $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. La $u(x)$ verifica, quasi ovunque, l'equazione (4).

Assumendo:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\theta^3} \int_0^1 (\xi - 1) \varphi(\xi) d\xi, & c_2 &= \frac{1}{\theta^3} \int_0^1 (\xi - 1) \varphi(\xi) d\xi, \\ c_3 &= \frac{1}{\theta^3} \int_0^1 \left[\frac{\xi \log(1 - \theta) - \log(1 - \theta \xi)}{\theta} + \frac{1}{2} \frac{1 - \xi}{1 - \theta \xi} \right] \varphi(\xi) d\xi, \\ c_4 &= -\frac{1}{\theta^3} \int_0^1 \left[\frac{\xi \log(1 - \theta) - \log(1 - \theta \xi)}{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\theta \xi (1 - \xi)}{1 - \theta \xi} \right] \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \right.$$

la soluzione di (4), data da (5), verifica le condizioni ai limiti

$$(7) \quad u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0.$$

Sostituendo le (6) nella (5), si verifica che $u(x)$ può scriversi al modo seguente:

$$(8) \quad u(x) = \int_0^1 G(x, \xi; \theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

con $G(x, \xi; \theta)$ *funzione di Green* del problema (4), (7), definita al modo seguente:

$$(9) \quad G(x, \xi; \theta) = \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{\theta^3} \left\{ \frac{\theta}{2} \frac{\xi x}{1 - \theta x} + \frac{\theta}{2} \frac{\xi x}{1 - \theta \xi} + \xi \log(1 - \theta x) + x \log(1 - \theta \xi) \right. \\ &\quad \left. - x \xi \log(1 - \theta) - \log(1 - \theta \xi) - \frac{\theta}{2} \frac{\xi}{1 - \theta x} - \frac{\theta}{2} \frac{\xi}{1 - \theta \xi} \right\} \text{ per } \xi \leq x, \\ &= \frac{1}{\theta^3} \left\{ \frac{\theta}{2} \frac{x \xi}{1 - \theta \xi} + \frac{\theta}{2} \frac{x \xi}{1 - \theta x} + x \log(1 - \theta \xi) + \xi \log(1 - \theta x) \right. \\ &\quad \left. - \xi x \log(1 - \theta) - \log(1 - \theta x) - \frac{\theta}{2} \frac{x}{1 - \theta \xi} - \frac{\theta}{2} \frac{x}{1 - \theta x} \right\} \text{ per } \xi \geq x. \end{aligned} \right.$$

Si verifica che, per $\theta \rightarrow 0$, $G(x, \xi; \theta)$ tende alla ben nota funzione di Green dell'equazione differenziale $u^{IV} = \varphi(x)$, con le condizioni ai limiti (7).

Sia $\mathfrak{A}$ la varietà lineare dello spazio $\mathfrak{L}^2(0, 1)$, costituita da tutte le funzioni $u(x)$ le quali godono delle seguenti proprietà: a) $u(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $(0, 1)$ con le sue derivate prima, seconda e terza e verifica le condizioni ai limiti (7); b) la $u'''(x)$ è assolutamente continua in $(0, 1)$ e la sua derivata appartiene a $\mathfrak{L}^2(0, 1)$.

Se in $\mathfrak{A}$ consideriamo l'operatore

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left[(1 - \theta x)^3 \frac{d^2}{dx^2} \right], \quad (0 < \theta < 1),$$

la funzione Lu appartiene a $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Poniamo:

$$(10) \quad \psi(x) = (1 - \theta x)^{-1/2} Lu.$$

La corrispondenza lineare che associa ψ a u , per quanto si è testé visto, è biunivoca e, allorché u descrive tutto $\mathfrak{A}$, ψ descrive tutto $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Posto: $\Gamma(x, \xi; \theta) = (1 - \theta x)^{1/2} (1 - \theta \xi)^{1/2} G(x, \xi; \theta)$, dalla (8) segue:

$$(11) \quad u(x) = (1 - \theta x)^{-1/2} \int_0^1 \Gamma(x, \xi; \theta) \psi(\xi) d\xi.$$

Scriveremo brevemente:

$$\Gamma\psi = \int_0^1 \Gamma(x, \xi; \theta) \psi(\xi) d\xi.$$

Consideriamo il problema di autovalori (1), che scriveremo al modo seguente:

$$(1') \quad Lu - \lambda (1 - \theta x) u = 0, \quad u \in \mathfrak{A},$$

ed il seguente problema di autovalori per una equazione integrale a nucleo simmetrico:

$$(12) \quad \Gamma\psi - \mu\psi = 0, \quad \psi \in \mathfrak{L}^2(0, 1).$$

È evidente che $\mu = 0$ non può essere autovalore del problema (12). Infatti, nel caso contrario, detta ψ_0 una corrispondente autosoluzione, sarebbe, in $(0, 1)$:

$$\int_0^1 G(x, \xi; \theta) (1 - \theta \xi)^{1/2} \psi_0(\xi) d\xi = 0$$

e, quindi, $\psi_0(x) = 0$ quasi ovunque in $(0, 1)$.

Il seguente teorema prova l'equivalenza fra i due problemi di autovalori (1') e (12):

I. *Condizione necessaria e sufficiente perché il numero reale $\mu \neq 0$ sia autovalore per il problema (12) è che $\lambda = \mu^{-1}$ sia autovalore per il problema (1'). Inoltre, se le $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ costituiscono un sistema completo di autosoluzioni, linearmente indipendenti relative all'autovalore μ di (12), posto: $u_k(x) = (1 - \theta x)^{-1/2} \psi_k(x)$, ($k = 1, \dots, n$), le funzioni $u_1(x), \dots, u_n(x)$, costituiscono un sistema completo di autosoluzioni, relative all'autovalore $\lambda = \mu^{-1}$, di (1').*

La dimostrazione si consegue immediatamente osservando che, se λ e $u(x)$ sono rispettivamente autovalore e autosoluzione di (1'), fatta la posizione (10), si ha, per la (11): $(1 - \theta x)^{1/2} \psi - \lambda (1 - \theta x)^{1/2} \Gamma \psi = 0$. Ciò esclude che possa essere $\lambda = 0$ e, quindi, $\Gamma \psi - \lambda^{-1} \psi = 0$. Viceversa, se μ e ψ sono autovalore ed autosoluzione per la (12), fatta la posizione (11), si ha, per la (10): $(1 - \theta x)^{1/2} u - \mu (1 - \theta x)^{-1/2} Lu = 0$. Cioè: $Lu - \mu^{-1} (1 - \theta x) u = 0$.

Per dimostrare che gli autovalori del problema (1) sono tutti positivi, basta far vedere che, per ogni $\psi \in \mathcal{L}^2(0, 1)$, riesce:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, \xi; \theta) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi \geq 0,$$

sussistendo il segno uguale se, e solo se, $\psi(x)$ è quasi ovunque nulla. Si ha, per la (10) e dopo una integrazione per parti:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, \xi; \theta) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi = \int_0^1 (1 - \theta x)^3 \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \right]^2 dx.$$

L'annullarsi dell'integrale al primo membro implica l'annullarsi identico di u in $(0, 1)$ e, quindi, $\psi = 0$ quasi ovunque in $(0, 1)$.

Posto:

$$\mathfrak{J}_1^1(\Gamma) = \int_0^1 \Gamma(x, x; \theta) dx \quad ; \quad \mathfrak{J}_1^2(\Gamma) = \int_0^1 \int_0^1 |\Gamma(x, \xi; \theta)|^2 dx d\xi,$$

dopo calcoli elementari ma assai laboriosi, specie per quanto riguarda $\mathfrak{J}_1^2(\Gamma)$, si ottiene:

$$\mathfrak{J}_1^1(\Gamma) = \frac{1}{\theta^2} \left\{ \left[-\frac{1}{3\theta^3} + \frac{1}{2\theta^2} - \frac{1}{3\theta} + \frac{1}{12} \right] \log(1 - \theta) + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} - \frac{7}{12} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^2(\Gamma) = \frac{1}{\theta^4} \left\{ \left[\frac{1}{9\theta^6} - \frac{1}{3\theta^5} + \frac{17}{36\theta^4} - \frac{7}{18\theta^3} + \frac{7}{36\theta^2} - \frac{1}{18\theta} + \frac{1}{144} \right] [\log(1 - \theta)]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{15\theta^5} - \frac{1}{6\theta^4} + \frac{7}{18\theta^3} - \frac{5}{12\theta^2} - \frac{53}{270\theta} - \frac{37}{1080} \right] \log(1 - \theta) \right. \\ \left. + \left[-\frac{2}{45\theta^4} + \frac{4}{45\theta^3} + \frac{47}{540\theta^2} - \frac{71}{540\theta} + \frac{1427}{32400} \right] \right\}. \end{aligned}$$

2. *Metodo di Rayleigh-Ritz per il problema (1) e dimostrazione della sua convergenza.*

Il teorema che segue costituisce il fondamento teorico del cosiddetto *metodo di Rayleigh-Ritz* per il calcolo per eccesso degli autovalori del problema (1). Riteniamo non inutile, per render completa la presente trattazione, fornire una semplice dimostrazione di questo teorema. Essa si fonda su un'idea impiegata in [5] (cfr. pagg. 140 e 141).

Indicheremo con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, gli autovalori del problema (1), ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità.

II. Sia $\{\alpha_n(x)\}$ un sistema di funzioni di $\mathfrak{A}$, linearmente indipendenti, e tale che $\{L\alpha_n\}$ sia completo in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Siano $\lambda_1^{(v)} \leq \lambda_2^{(v)} \leq \dots \leq \lambda_v^{(v)}$ le v radici (tutte positive) della seguente equazione secolare:

$$\det \left\{ \int_0^1 (1 - \theta x)^3 \alpha_n''(x) \alpha_m''(x) dx - \lambda \int_0^1 (1 - \theta x) \alpha_n(x) \alpha_m(x) dx \right\} = 0$$

$$(n, m = 1, \dots, v).$$

Riesce: $\lambda_k^{(v)} \geq \lambda_k^{(v+1)}$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_k^{(v)} = \lambda_k$.

Poniamo:

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) dx.$$

Introduciamo, seguendo [5], in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ il seguente nuovo prodotto scalare:

$$(13) \quad ((u, v)) = (\Gamma u, v).$$

Ciò è lecito, avendo nel § precedente dimostrato che Γ è un operatore simmetrico e strettamente positivo. Sia Λ lo spazio hilbertiano ottenuto da $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ per completamento rispetto alla metrica introdotta dal nuovo prodotto scalare (13). La lunghezza di un vettore u di $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ verrà indicata con $|u|$ e quella di un vettore u in Λ con $\|u\|$. Per $u \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$ e $v \in \Lambda$, si ha:

$$(14) \quad |((u, v))| \leq \|u\| \|v\| = (\Gamma u, u)^{1/2} \|v\| \leq |\Gamma|^{1/2} |u| \|v\|,$$

dove $|\Gamma|$ denota la norma dell'operatore Γ di $\mathfrak{L}^2(0, 1)$.

Dalla (14) segue che $((u, v))$, come funzione di u , è un funzionale lineare e continuo, definito in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Sia allora $\tilde{\Gamma}$ la trasformazione lineare, certamente esistente, che muta un elemento di Λ in un elemento di $\mathfrak{L}^2(0, 1)$, tale che:

$$(15) \quad ((u, v)) = (u, \tilde{\Gamma}v)$$

Dalla (14), assunto $u = \tilde{\Gamma}v$, si ha: $|\tilde{\Gamma}v|^2 = (\tilde{\Gamma}v, \tilde{\Gamma}v) = ((\tilde{\Gamma}v, v)) \leq \leq |\Gamma|^{1/2} |\tilde{\Gamma}v| \|v\|$. Cioè $\tilde{\Gamma}$ è una trasformazione lineare e continua dello spazio Λ in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Se $v \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$, si ha:

$$(16) \quad \tilde{\Gamma}v = \Gamma v,$$

e, quindi, $\tilde{\Gamma}$ è un prolungamento di Γ da $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ a tutto Λ . Sia $u \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$ e $v \in \Lambda$. Si ha, per la (15): $((\tilde{\Gamma}u, v)) = (\tilde{\Gamma}u, \tilde{\Gamma}v)$ e, per la (16): $(\tilde{\Gamma}u, \tilde{\Gamma}v) = (\Gamma u, \tilde{\Gamma}v) = ((u, \tilde{\Gamma}v))$, cioè: $((\tilde{\Gamma}u, v)) = ((u, \tilde{\Gamma}v))$. Poiché tale relazione sussiste per $u \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$ e $v \in \Lambda$, avendo già provato la continuità della $\tilde{\Gamma}$ in Λ , ed essendo $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ una base per Λ , segue che la detta relazione sussiste comunque si assumano u e v in Λ . L'operatore $\tilde{\Gamma}$ è quindi simmetrico.

Sia $\{\psi_k\}$ un qualsiasi sistema completo in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ e sia $\psi \in \Lambda$ tale che, per ogni k : $((\psi_k, \psi)) = 0$, cioè, per la (15): $(\psi_k, \tilde{\Gamma}\psi) = 0$. Ciò implica $\tilde{\Gamma}\psi = 0$ e, quindi, per ogni $u \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$: $((u, \psi)) = (u, \tilde{\Gamma}\psi) = 0$. Ma, essendo $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ una base per Λ , segue $\psi = 0$. Quindi $\{\psi_k\}$ è completo anche in Λ . Ciò, pertanto, si verifica, in particolare, assumendo come $\{\psi_k\}$ un sistema ortonormale e completo di autovettori dell'operatore Γ . Sia $\{\psi_k\}$ un tale sistema. Poniamo $\tilde{\psi}_k = \mu_k^{-1/2} \psi_k$. Riesce:

$$((\tilde{\psi}_h, \tilde{\psi}_k)) = (\Gamma \tilde{\psi}_h, \tilde{\psi}_k) = \mu_h (\tilde{\psi}_h, \tilde{\psi}_k) = \mu_h \mu_h^{-1/2} \mu_k^{-1/2} \delta_k^h = \delta_k^h.$$

Ne segue che $\{\tilde{\psi}_k\}$, completo in Λ è, altresì, ivi ortonormale.

Si ha, per ogni $\psi \in \Lambda$:

$$\tilde{\Gamma}\psi = \sum_{k=1}^{\infty} ((\tilde{\Gamma}\psi, \tilde{\psi}_k)) \tilde{\psi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} ((\psi, \Gamma \tilde{\psi}_k)) \tilde{\psi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k ((\psi, \tilde{\psi}_k)) \tilde{\psi}_k.$$

Si è così ottenuta la *risoluzione spettrale* dell'operatore $\tilde{\Gamma}$, la quale prova che: a) $\tilde{\Gamma}$ è un operatore compatto e strettamente positivo; b) gli autovalori di $\tilde{\Gamma}$ sono tutti e soli quelli di Γ e ciascuno di tali autovalori ha la stessa molteplicità e gli stessi autovettori che ad esso competono come autovalore di Γ . Possiamo pertanto, ai fini del calcolo degli autovalori, sostituire al problema (12), il seguente:

$$(17) \quad \tilde{\Gamma}\psi - \mu\psi = 0, \quad \psi \in \Lambda.$$

Poniamo: $\beta_n = (1 - \theta x)^{-1/2} L\alpha_n$; il sistema $\{\beta_n\}$ è costituito da funzioni linearmente indipendenti ed è completo in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ e, quindi, in Λ .

Consideriamo l'equazione secolare:

$$(18) \quad \det \{((\tilde{\Gamma}\beta_n, \beta_m)) - \mu ((\beta_n, \beta_m))\} = 0 \quad (n, m = 1, \dots, v).$$

Essa ha tutte positive le sue radici, dato che, dall'essere $\tilde{\Gamma}$ strettamente positivo, segue che è strettamente positiva la matrice $\{((\tilde{\Gamma}\beta_n, \beta_m))\}$. Siano

$\mu_1^{(v)} \geq \mu_2^{(v)} \geq \dots \geq \mu_v^{(v)}$ le radici di (18). Si ha (cfr. [4], teor. 15. XIII):
 $\mu_k^{(v)} \leq \mu_k^{(v+1)}$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \mu_k^{(v)} = \mu_k = \lambda_k^{-1}$. Riesce, d'altra parte:

$$((\tilde{\Gamma}\beta_n, \beta_m)) = \int_0^1 (1-\theta x) \alpha_n(x) \alpha_m(x) dx \quad ; \quad ((\beta_n, \beta_m)) = \int_0^1 (1-\theta x)^3 \alpha_n''(x) \alpha_m''(x) dx.$$

Resta così dimostrato il teorema.

Come sistema $\{\alpha_n\}$ in $\mathfrak{A}$, noi assumeremo quello le cui funzioni sono così definite:

$$(19) \quad \alpha_n(x) = 6x^{n+4} - (n+3)(n+4)x^3 + (n^2 + 7n + 6)x \quad (n=1, 2, \dots).$$

Riesce: $\alpha_n^{IV}(x) = 6(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)x^n$; pertanto il sistema $\{\alpha_n^{IV}(x)\}$ è completo in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Facciamo vedere che $\{L\alpha_n\}$ è completo in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$, come richiesto dall'ipotesi del teorema II. Per $\varphi \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$, consideriamo la trasformazione lineare

$$T\varphi = \frac{d^4}{dx^4} \int_0^1 G(x, \xi; \theta) \varphi(\xi) d\xi.$$

Essa, come trasformazione di $\mathfrak{L}^2(0, 1)$ in $\mathfrak{L}^2(0, 1)$, è continua, come segue facilmente da (5) e (6); è biunivoca, dato che $T\varphi = 0$ implica $\varphi = 0$ quasi ovunque in $(0, 1)$. Infine il suo codominio coincide con $\mathfrak{L}^2(0, 1)$. Infatti, se è $\psi \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$, sia $u \in \mathfrak{A}$, tale che $u^{IV} = \psi$. Si ha allora: $TLu = \psi$. Ne segue (cfr. [7], pag. 102, teor. XVI), che la trasformazione inversa T^{-1} è continua. Si noti che, per ogni $u \in \mathfrak{A}$, riesce:

$$T^{-1} \frac{d^4}{dx^4} u = Lu.$$

Dato arbitrariamente $\varphi \in \mathfrak{L}^2(0, 1)$, sia:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi; \theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

e siano $c_1^{(k)}, \dots, c_k^{(k)}$, costanti tali che, posto:

$$\gamma_k(x) = \sum_{n=1}^k c_n^{(k)} \alpha_n(x),$$

si abbia, nella metrica di $\mathfrak{L}^2(0, 1)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d^4 \gamma_k(x)}{dx^4} = \frac{d^4 u}{dx^4} = T\varphi.$$

Riesce, allora:

$$\varphi = T^{-1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d^4 \gamma_k(x)}{dx^4} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{-1} \left(\frac{d^4 \gamma_k(x)}{dx^4} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} L\gamma_k(x).$$

È così provata la completezza di $\{L\alpha_n\}$.

Posto:

$$a_{nm}(\theta) = \int_0^1 (1-\theta x)^3 \alpha_n''(x) \alpha_m''(x) dx, \quad b_{nm}(\theta) = \int_0^1 (1-\theta x) \alpha_n(x) \alpha_m(x) dx,$$

si ha:

$$a_{nm}(\theta) = 36(n+4)(m+4)(n+3)(m+3) \left\{ \left(\frac{1}{n+m+5} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+4} + \frac{1}{3} \right) - 3\theta \left(\frac{1}{n+m+6} - \frac{1}{n+5} - \frac{1}{m+5} + \frac{1}{4} \right) + 3\theta^2 \left(\frac{1}{n+m+7} - \frac{1}{n+6} - \frac{1}{m+6} + \frac{1}{5} \right) - \theta^3 \left(\frac{1}{n+m+8} - \frac{1}{n+7} - \frac{1}{m+7} + \frac{1}{6} \right) \right\},$$

$$b_{nm}(\theta) = \frac{36}{n+m+9} - \frac{6(m+3)(m+4)}{n+8} - \frac{6(n+3)(n+4)}{m+8} + \frac{6(m^2+7m+6)}{n+6} + \frac{6(n^2+7n+6)}{m+6} + \frac{(n+3)(m+3)(n+4)(m+4)}{7} - \frac{[(n+3)(n+4)(m^2+7m+6) + (m+3)(m+4)(n^2+7n+6)]}{5} + \frac{(n^2+7n+6)(m^2+7m+6)}{3} - \theta \left\{ \frac{36}{n+m+10} - \frac{6(m+3)(m+4)}{n+9} - \frac{6(n+3)(n+4)}{m+9} + \frac{6(m^2+7m+6)}{n+7} + \frac{6(n^2+7n+6)}{m+7} + \frac{(n+3)(m+3)(n+4)(m+4)}{8} - \frac{[(n+3)(n+4)(m^2+7m+6) + (m+3)(m+4)(n^2+7n+6)]}{6} + \frac{(n^2+7n+6)(m^2+7m+6)}{4} \right\}.$$

Prima di chiudere questo paragrafo, osserviamo che, per ogni $u \in \mathfrak{M}$, si ha:

$$(1-\theta)^3 \frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} \leq \frac{\int_0^1 (1-\theta x)^3 (u'')^2 dx}{\int_0^1 (1-\theta x) u^2 dx} \leq \frac{1}{1-\theta} \frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

Da queste disuguaglianze, con classico ragionamento fondato sulle proprietà di massimo-minimo degli autovalori, e tenendo conto del fatto che il funzionale

$$\frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}$$

è il *quoziente di Rayleigh-Ritz* relativo al problema: $u^{IV} - \lambda u = 0$, $u \in \mathfrak{M}$, si ottengono le seguenti limitazioni per gli autovalori λ_k del problema (I):

$$(20) \quad (1-\theta)^3 \pi^4 k^4 \leq \lambda_k \leq \frac{\pi^4 k^4}{1-\theta} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

3. Risultati numerici.

Si assuma $\theta = 0.5$. Il metodo di Rayleigh-Ritz, con la scelta di α_n indicata dalla (19), fornisce valori per eccesso per i primi ν autovalori di (1). Tali valori per eccesso sono le radici dell'equazione secolare:

$$(21) \quad \det \left\{ a_{nm} \left(\frac{1}{2} \right) - \lambda b_{nm} \left(\frac{1}{2} \right) \right\} = 0 \quad (n, m = 1, \dots, \nu).$$

La risoluzione di tale equazione è stata ottenuta per ogni $\nu \leq 20$. È questo un problema di notevole difficoltà dal punto di vista dell'effettivo calcolo numerico ⁽¹⁾.

La seguente tabella mostra le radici della (21) arrotondate in eccesso, per $16 \leq \nu \leq 20$.

(IV)

$\lambda_k^{(\nu)}$	$\nu = 16$	$\nu = 17$	$\nu = 18$	$\nu = 19$	$\nu = 20$
$k = 1$	50.71623066	50.71623066	50.71623066	50.71623066	50.71623066
$k = 2$	838.2090472	838.2090472	838.2090472	838.2090472	838.2090472
$k = 3$	4222.246929	4222.246929	4222.246929	4222.246929	4222.246929
$k = 4$	13305.81587	13305.81587	13305.81587	13305.81587	13305.81587
$k = 5$	32431.98601	32431.98601	32431.98601	32431.98601	32431.98601
$k = 6$	67184.772	67184.77077	67184.77077	67184.77076	67184.77076
$k = 7$	124389.3	124389.08	124389.0698	124389.0693	124389.0691
$k = 8$	212112.8	212112.6	212110.8	212110.69	212110.68
$k = 9$	339983	339673	339670	339656.7	339656.5
$k = 10$	521078	518808	517665	517646	517576
$k = 11$	780577	767783	761601	758048	757963
$k = 12$	1279710	1126251	1098376	1083914	1074337
$k = 13$	1894167	1867190	1590724	1534848	1504837
$k = 14$	4865642	2725434	2677921	2208990	2104776
$k = 15$	8283779	7203728	3862356	3782890	3025235
$k = 16$	33954787	12177803	10471051	5398551	5271200
$k = 17$		50197961	17597230	14967564	7450551
$k = 18$			72862189	25030816	21069759
$k = 19$				104008366	35091983
$k = 20$					146220917

(1) I calcoli numerici sono stati eseguiti al già citato Centro di Calcolo degli Aerospace Research Laboratories.

Riesce, per $\theta = 0.5$, e arrotondando in eccesso il valore numerico:

$$\mathfrak{J}_1^1(\Gamma) \simeq 0.0212914592.$$

Servendosi di tale valore per $\mathfrak{J}_1^1(\Gamma)$, sono stati ottenuti i valori per difetto della tabella (II), mediante la seguente formula che rientra come caso particolare ($s = 1$, $n = 1$) in quella contenuta a pag. 156 di [4]:

$$\lambda_k > \left[0.0212914592 - \sum_{s=1}^{20} \frac{1}{\lambda_s^{(20)}} + \frac{1}{2\pi^4} \sum_{s=1}^{20} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{180} + \frac{1}{\lambda_k^{(20)}} \right]^{-1}.$$

Per migliorare tali valori per difetto, ci serviremo della indicata formula di [4], nel caso $s = 1$ e $n = 2$. Riesce, per $\theta = 0.5$, e arrotondando in eccesso il valore numerico:

$$\mathfrak{J}_1^2(\Gamma) \simeq 0.0003902682363.$$

Si osservi, inoltre, che come valori per eccesso dei λ_k , conviene assumere quelli forniti dal metodo di Ritz soltanto per $k \leq 17$, mentre che, per $k > 17$, si ottiene un valore per eccesso più basso usando la (20). La formula impiegata per avere i valori per difetto dei λ_k è la seguente:

$$(21) \quad \lambda_k > \left[0.0003902682363 - \sum_{s=1}^{17} \frac{1}{[\lambda_s^{(20)}]^2} + \frac{1}{4\pi^8} \sum_{s=1}^{17} \frac{1}{s^8} - \frac{1}{37800} + \frac{1}{[\lambda_k]^{-2}} \right]^{-1/2},$$

ove: $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^{(20)}$ se $k \leq 17$, $\tilde{\lambda}_k = 2\pi^4 k^4$ se $k > 17$.

Detto ε_k il miglior valore per eccesso ottenuto per λ_k , e δ_k quello per difetto dato dalla (21), nella seguente tabella (V) sono inclusi i valori per eccesso e per difetto di quegli autovalori λ_k per i quali $(\varepsilon_k - \delta_k) \varepsilon_k^{-1} < 0.25$.

(V)

λ_k	Difetti	Eccessi
$k = 1$	50.71623063	50.71623066
$k = 2$	838.2089	838.2091
$k = 3$	4222.235	4222.247
$k = 4$	13305.47	13305.82
$k = 5$	32427	32432
$k = 6$	67140	67185
$k = 7$	124108	124390
$k = 8$	210726	212111
$k = 9$	334060	339657
$k = 10$	498394	517576
$k = 11$	701261	757963
$k = 12$	928773	1074337
$k = 13$	1166861	1504837

(VI)

σ_k	Difetti	Eccessi
$k = 1$	2.082607695	2.082607697
$k = 2$	34.420153	34.420157
$k = 3$	173.3815	173.3821
$k = 4$	546.37	546.39
$k = 5$	1331.57	1331.79
$k = 6$	2757	2759
$k = 7$	5096	5108
$k = 8$	8653	8711
$k = 9$	13717	13948
$k = 10$	204660	212537
$k = 11$	287965	311250
$k = 12$	381390	441165
$k = 13$	479159	617995

(VII)

$\pi^{-2} \sqrt{\lambda_k}$	Difetti	Eccessi
$k = 1$	0.7215621412	0.7215621415
$k = 2$	2.9334345	2.9334348
$k = 3$	6.583722	6.583731
$k = 4$	11.6873	11.6875
$k = 5$	18.245	18.247
$k = 6$	26.253	26.263
$k = 7$	35.69	35.74
$k = 8$	46.51	46.67
$k = 9$	58.59	59.06
$k = 10$	71.52	72.90
$k = 11$	84.84	88.22
$k = 12$	97.64	105.02
$k = 13$	109.4	124.3

Nella tabella (VI) abbiamo riportato le limitazioni che si ottengono dalla (V) per gli autovalori σ_k del problema (2), usando la (3) per $\theta = 0.5$. Nella (VII) si trovano le limitazioni, che si ottengono dalla (V), per $\pi^{-2} \sqrt{\lambda_k}$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] N. BAZLEY e D. W. FOX, *Methods for Lower Bounds to Frequencies of Continuous Elastic Systems*, « Journal of Applied Mathematics and Physics » (ZAMP), 17 (1966).
- [2] G. FICHERA, *Il calcolo degli autovalori*, « Atti dell'VIII Congresso U.M.I. », Bollettino dell'U.M.I. (In corso di stampa).
- [3] G. FICHERA, *Sul calcolo degli autovalori*, « Atti Simposio delle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica », Cagliari-Sassari 1964. Ediz. Cremonese, Roma 1965.
- [4] G. FICHERA, *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems*. Lecture Notes in Math. N. 8. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1965.
- [5] G. FICHERA, *Sul miglioramento delle approssimazioni per difetto degli autovalori*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, 42 (1967).
- [6] G. FICHERA, *Su un metodo del Picone per il calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », 4, 40 (1955).
- [7] G. FICHERA, *Lezioni sulle Trasformazioni Lineari*, vol. I, Ediz. Veschi, Roma 1962.
- [8] F. G. TRICOMI, *Sulle vibrazioni trasversali di aste, specialmente di bielle, di sezione variabile*, « Ricerche di Ingegneria », 4 (1936).
- [9] F. G. TRICOMI, *Integral Equations*. Interscience Publ. New York 1957.
- [10] T. VIOLA, *Calcolo approssimato di autovalori*, « Rend. di Mat. e delle sue Appl. », serie 5^a, vol. II (1941).