Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jacques-Louis Lions, Enrico Magenes

Contrôle optimal et espaces du type de Gevrey. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.2, p. 151–157.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_2_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 febbraio 1968

Presiede il Presidente Beniamino Segre

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Contrôle optimal et espaces du type de Gevrey.* Nota II di Jacques Louis Lions e Enrico Magenes, presentata [(*)] dal Corrisp. L. Amerio.

Riassunto. — Si estende al caso di equazioni evoluzione lo studio di certi problemi di controllo ottimo in spazi del tipo di Gevrey, iniziato nella Nota I.

Systemes d'evolution.

1. *Position du problème.*

1.1. *Généralités.*

On peut donner des généralisations analogues à celles de la Note précédente pour tous les systèmes gouvernés par des *opérateurs paraboliques* ou *hyperboliques*, de *Schroedinger* etc. cela en utilisant les résultats de [3], § 2 et [4], 2), 3) (pour la bibliographie, cfr. la Note précédente). On obtient ainsi des *problèmes unilatéraux* comme dans [1], [2] chap. 6, avec en outre des opérateurs d'ordre infini (analogues à Λ^L introduit en (2.7), Note I) sur des espaces de *fonctions analytiques* ou de *Gevrey.*

On va présenter ici une autre généralisation, dans le cadre des *semi-groupes* [(1)].

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1967.

(1) Les résultats qui suivent ont été exposés (sans l'introduction de l'aspect « contrôle optimal ») par l'un des A, à l'Université de Tokyo, Mai 1966.

1.2. *Semi groupes et vecteurs de classe* M_k.

Soit E un espace de Hilbert sur **R** (2) et $G(t)$ un semi groupe continu dans E, dont $-A$ désigne le générateur infinitésimal, de domaine $D(A)$ (pour ces notions, cfr. Yosida [7]).

Définition 1.1 – Soit $\{M_k \mid k = 0, 1, \cdots\}$ une suite de nombres > 0.

On appelle vecteur de classe $\{M_k\}$ tout élément $e \in E$ tel que la fonction $t \to G(t)\,e$ soit de classe M_k de $t \geq 0 \to E$, c'est à dire telle qu'il existe une constante L telle que $\sup\limits_{t \geq 0} \left(\frac{1}{L^k M_k} \| G^{(k)}(t)\, e \|_E\right) \leq$ constante indépendante de k.

On désigne par $D(A^\infty ; M_k)$ l'espace des vecteurs de classes M_k. On vérifie sans peine que

$$(1.1) \quad e \in D(A^\infty ; M_k) \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pour L convenable, on a} \\ \frac{1}{L^k M_k} \| A^k e \| \leq \text{constante indépendante de } k \end{array} \right.$$

($\| \quad \|$ = norme dans E).

On montre que

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{si la suite } M_k \textit{ est non quasi-analytique alors} \\ D(A^\infty ; M_k) \textit{ est dense dans } E. \end{array} \right.$$

Remarque 1.1.

La condition de non quasi analyticité n'est pas nécessaire pour la validité de (1.2). Par exemple on peut avoir $D(A^\infty ; M_k)$ dense dans E avec $M_k = 1$, $\forall k$.

On suppose désormais qu'il existe un nombre H tel que

$$(1.3) \qquad M_{k+1} \leq H^k M_k \qquad \forall k \text{ (3)}.$$

On pose

$$(1.4) \quad D^L(A^\infty ; M_k) = \left\{ e \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L^{2k} M_k^2} \| A^k e \|^2 = \| e \|^2_{D^L(A^\infty ; M_k)} < \infty \right\}.$$

On note que, muni de la norme $\| e \|_{D^L(A^\infty ; M_k)}$, $D^L(A^\infty ; M_k)$ est un espace de Hilbert. On a l'identité algébrique

$$(1.5) \qquad D(A^\infty ; M_k) = \bigcup_n D^{L_n}(A^\infty ; M_k),$$

L_n étant une suite *quelconque* tendant vers $+\infty$. On munit $D(A^\infty ; M_k)$ de la topologie de limite inductive correspondante.

(2) Hypothèse qui n'interviendra que dans l'étude du problème de contrôle optimal. On pourrait ailleurs supposer que E est un espace de Banach réflexif, sur **C**.

(3) Hypothèse vérifiée si $M_k = (k!)^s$ ($s > 1$, cas Gevrey; $s = 1$, cas analytique).

On montre ensuite que

$$(1.6)\quad \begin{cases} \forall t \geq 0\,,\ G(t) \in \mathcal{L}(D(A^\infty ; M_k) ; D(A^\infty ; M_k)), \\ t \to G(t) \text{ est } C^\infty \text{ de } t \geq 0 \to \mathcal{L}(D(A^\infty ; M_k) ; D(A^\infty ; M_k)), \\ \dfrac{d}{dt} G(t)\, e\,|_{t=0} = -A e \qquad \forall e \in D(A^\infty ; M_k). \end{cases}$$

Noter aussi que

$$(1.7)\qquad G(t) \in \mathcal{L}(D^L(A^\infty ; M_k) ; D^L(A^\infty ; M_k)).$$

On a donc ceci: soit v donné dans $D^L(A^\infty ; M_k)$; il existe une solution $y(t ; v) = y(v)$ unique, à valeurs *dans* $D^L(A^\infty ; M_k)$, de

$$(1.8)\qquad \frac{d}{dt} y(t ; v) + Ay(t ; v) = 0, \qquad t > 0$$

$$(1.9)\qquad y(0 ; v) = v.$$

On va considérer v comme le contrôle (4) et $y(v)$ comme l'*état du système* (5).

1.3. *Le problème de contrôle optimal.*

Posant (les notations sont analogues à celles de la note précédente

$$(1.10)\qquad \mathcal{U} = D^L(A^\infty ; M_k)$$

on considère *la fonction coût*

$$(1.11)\qquad J(v) = \| y(T ; v) - z_d \|^2_{D^L(A^\infty ; M_k)} + \nu \| v \|^2_{\mathcal{U}},$$

où

T est > 0 *fixé*,

z_d est donné dans $D^L(A^\infty ; M_k)$,

ν est fixé > 0.

On donne ensuite

$$(1.12)\qquad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé dans } \mathcal{U}\,,$$

et on cherche à « caractériser » l'unique *élément* u de $\mathcal{U}_{ad}$ (le contrôle optimal) tel que

$$(1.13)\qquad \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) = J(u)$$

Pour la résolution de ce problème nous avons bèsoin de la « situation transposée » de celle du n. 1.2, ce qui fait l'objet du n. suivant.

(4) Il s'agit plutot d'un problème de « filtrage ».

(5) On peut également, comme on verra dans [2], vol. 3, considérer les systèmes gouvernés par des équations *du 2ème ordre en t* (et donc, en particulier, hyperboliques).

1.4. *La situation transposée.*

Soit $G^*(t)$ le semi-groupe adjoint de $G(t)$. Identifions E à son dual; alors $G^*(t) \in \mathfrak{L}(E; E)$. Soit $-A^*$ le générateur infinitésimal de $G^*(t)$, $D(A^*)$ son domaine; A^* est l'adjoint de A (au sens des opérateurs non bornés) et évidemment le n. 1.2 est valable dans la situation adjointe: $G^*(t)$ est un semi groupe C^∞ dans $D(A^{*\infty}; M_k)$.

On fera l'*hypothèse* (réalisée d'après (1.2) dans le cas où M_k n'est pas quasi analytique):

$$D(A^{*\infty}; M_k) \text{ est dense dans } E. \tag{1.14}$$

Alors, $D(A^{*\infty}; M_k)'$ désignant le dual de $D(A^{*\infty}; M_k)$, on a:

$$D(A^\infty; M_k) \subset E \subset D(A^{*\infty}; M_k)'. \tag{1.15}$$

Naturellement on a les propriétés analogues à (1.6), en particulier

$$G^*(t) \in \mathfrak{L}(D(A^{*\infty}; M_k); D(A^{*\infty}; M_k)). \tag{1.16}$$

Par transposition, on en déduit les propriétés suivantes:

(1.17) $\left\{\begin{array}{l}G(t) \text{ se prolonge par continuité en un opérateur – encore noté } G(t) \text{ –} \\ \text{linéaire continue de } D(A^{*\infty}; M_k)' \text{ dans lui même;}\end{array}\right.$

(1.18) $\left\{\begin{array}{l}\forall f \in D(A^{*\infty}; M_k)', \text{ la fonction } t \to G(t)f \text{ est} \\ C^\infty \text{ de } t \geq 0 \to D(A^{*\infty}; M_k)'\end{array}\right.$

(1.19) $\left\{\begin{array}{l}G(t) \text{ est un semi groupe dans } (D(A^{*\infty}; M_k))' \text{ dont} \\ -A \text{ (qui se prolonge à } D(A^{*\infty}; M_k)' \to D(A^{*\infty}; M_k)') \text{ est le} \\ \quad \text{générateur infinitésimal.}\end{array}\right.$

Notons aussi les autres propriétés suivantes, que l'on démontre après avoir donné un théorème de structure des elements de $D(A^{*\infty}, M_k)'$:

(1.20) supposons en outre qu'il existe $d > 0$ tel que

$$M_{k+j} \leq d^{k+j} M_k M_j \qquad \forall k, j$$

et posons

$$G(\varphi) = \int_0^{+\infty} G(t)\, \varphi(t)\, dt$$

pour toute fonction scalaire $t \to \varphi(t)$ de classe M_k dans $\mathbf{R}_+$ et appartenant à $\mathfrak{D}(\mathbf{R}_+)$; alors on a

$$G(\varphi) \in \mathfrak{L}(D(A^{*\infty}; M_k)'; D(A^\infty; M_k));$$

(1.21) Sous les mêmes hypothèses que dans (1.20) et si en outre $G(t)$ est un sémigroupe *analytique* et s'il existe d_1 tel que

$$k! \leq d_1 M_k \qquad \forall k;$$

alors pour $t > 0$ on a

$$G(t) \in \mathcal{L}(D(A^{*\infty}; M_k)'; D(A^\infty; k!))$$

et en outre, pour tout $f \in D(A^{*\infty}; M_k)'$, la fonction $t \to G(t)f$ est analytique de l'ouvert $t > 0 \to D(A^\infty; k!)$.

On peut evidemment appliquer les résultats précédents (1.17),...(1.21) à la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = 0 & t > 0, \\ y(0) = f & \text{avec } f \text{ donné dans } D(A^{*\infty}; M_k)'. \end{cases}$$

Ceci a un intérêt, croyons-nous, surtout dans les cas concrets des problèmes aux limites pour certaines équations d'évolution aux dérivées partielles (cfr. [2] vol. 3), indépendamment de l'application que nous ferons dans les numéros suivants.

2. *Condition nécessaires et suffisantes d'optimalité.*

2.1. *Prèmière caractérisation.*

Le contrôle u est optimal si et seulement si

$$\begin{cases} (y(T;u) - z_d, y(T;v) - y(T;u))_{D^L(A^\infty; M_k)} + \nu(u, v-u)_{D^L(A^\infty; M_k)} \geq 0 \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Introduisons l'opérateur (comparer à (2.7), de la Note précédente)

$$\nabla^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L^{2k} M_k^2} A^{*k} A^k. \tag{2.2}$$

On vérifie sans peine que

$$\nabla^L \in \mathcal{L}(D^L(A^\infty; M_k); (D^L(A^\infty; M_k))'). \tag{2.3}$$

Alors (2.1) équivaut à

$$\begin{cases} \langle \nabla^L (y(T;u) - z_d), y(T;v) - y(T;u)\rangle + \nu \langle \nabla^L u, v - u\rangle \geq 0 \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \end{cases} \tag{2.4}$$

où les crochets désignent les produits scalaires entre $D^L(A^\infty; M_k)$ et son dual.

2.2. *Etat adjoint.*

L'état adjoint $p(u)$ est defini par *la* solution de

$$-\frac{d}{dt}p(u)+A^{*}p(u)=0 \qquad \text{dans} \quad]0,T[, \tag{2.5}$$

$$p(T;u)=\nabla^{L}(y(T;u)-z_d) \tag{2.6}$$

$$p(t;u)\in(D^{L}(A^{\infty};M_k))'. \tag{2.7}$$

La solution est donnée par

$$p(t;u)=G^{*}(T-t)\nabla^{L}(y(T;u)-z_d) \tag{2.8}$$

(applique (1.17) (1.18) (1.19) en échangeant les rôles de A et A*).

Alors on vérifie que

$$\langle\nabla^{L}(y(T;y)-z_d),y(T;v)-y(T;u)\rangle=$$
$$=\langle p(0;u),y(0;v)-y(0;u)\rangle=\langle p(0;u),v-u\rangle$$

et donc (2.4) équivaut à

$$\langle p(0;u)+\nu\nabla^{L}u,v-u\rangle\geq 0 \qquad \forall v\in\mathfrak{U}_{ad}. \tag{2.9}$$

2.3. *Conclusion.*

On a en résumé le

THÉORÈME 2.1. – *Le contrôle optimal u est donné par la résolution du système*

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}y(u)+Ay(u)=0\\&-\frac{d}{dt}p(u)+A^{*}p(u)=0\end{aligned}\right. \qquad \text{dans} \quad]0,T[\tag{2.10}$$

$$\left\{\begin{aligned}&y(0;u)=u,\\&p(T;u)=\nabla^{L}(y(T;u)-z_d)\end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

$$\langle p(0;u)+\nu\nabla^{L}u,v-u\rangle\geq 0 \qquad \forall v\in\mathfrak{U}_{ad}. \tag{2.9}$$

3. *Application.*

Nous nous bornons à une seule application. Nous prenons Ω et A comme dans la Note précédente et

$$E=L^{2}(\Omega),$$

Alors on a

$$D(A)=\{\psi\mid\psi\in H^{2}(\Omega)\quad,\quad\psi=0 \text{ sur } \Gamma\}$$

On est alors dans les conditions d'applications de la théorie précédente. Si l'on prend

$$M_k = ((2\,k)!)^s \qquad (s \geq 1) \tag{3.1}$$

alors, grace au théorème 1.1, chap. II de [4], 3):

$$D^L(A^\infty; M_k) \subset D_s(\bar\Omega) = \{\text{fonctions de Gevrey d'ordre } s \text{ dans } \bar\Omega\}. \tag{3.2}$$

Prenons

$$\mathfrak{U}_{ad} = \{v \mid v \in D^L(A^\infty; M_k) \quad , \quad v \geq 0 \text{ dans } \Omega\}. \tag{3.3}$$

Le problème auquel on aboutit (appliquant le Théorème 2.1) est alors le suivant:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} y + Ay = 0 \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T] \tag{3.4}$$

$$y = 0 \quad , \quad p = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{3.5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &p(x, T) = \nabla^L(y(x, T) - z_d(x)), \\ &y(x, 0) \geq 0, \\ &p(x, 0) + \nu\nabla^L y(x, 0) \geq 0 \\ &y(x, 0)[p(x, 0) + \nu\nabla^L y(x, 0)] = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans } \Omega \text{ (6)}. \tag{3.6}$$

Il s'agit lá d'*un problème non linéaire*, problème du type « unilateral », contenant, comme dans la Note précédente, des opérateurs différentiels d'ordre infini.

(6) On écrit la *fonctionelle* $p(T) \in (D^L(A^\infty; M_k))'$ comme une *fonction*. Il s'agit d'un écriture symbolique.